ANUL XXV. MARTIE 1945 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. M. GHERMANESCU: REDUCEREA TORSORILOR LA DIADE
2. NOTE MATEMATICE 1, 2.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 612, 1970, 2176, 2185, 2192, 2196. 2198, 2236, 2237.
5. PROBLEME PROPUSE: 2305–2312.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

38678.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

«R M. T.» mulţumeşte D-lui Prof. CORNELIU POPESCU, membru în Comitet, pentru contribuţia benevolă de 5000 lei.

Cu plăcere anunţăm că începând de la 15 Martie 1945 mai fac parte printre membrii REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA şi D-nii: Profesor VIRGIL GHIŢESCU, Braşov; Căpitan MIRCEA GRUMĂZESCU, Bucureşti, ambii corespondenţi distinşi a-i «R.M.T.»

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (o mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 800 lei fiecare.

ANUL XXV — No. 1. TIMISOARA, MARTIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

REDUCEREA TORSORILOR LA DIADE

DE

M. GHERMĂNESCU.

1. — Fiind dat un *torsor* T (un sistem de vectori), una din problemele importante ce se pun este aceia de a-l reduce la o *diadă*, adică la un sistem echivalent de doi vectori alunecători. O astfel de problemă este cuadruplu nedeterminată, căci torsorul depinde de *șase* parametrii, diada de *zece*, astfel că problema duce la un sistem de șase ecuații cu zece necunoscute, ceia ce face că, în spațiu *există o cuadruplă infinitate de diade, echivalente cu un torsor dat.*

Rezultă atunci că, pentru a avea o reducere unică, trebue ca diada căutată să îndeplinească patru condiții simple. Ori unele cazuri ce am cercetat au dus la existența unei simple sau duble infinități de diade, echivalente cu un torsor dat acolo unde așteptam o singură diadă. Un astfel de rezultat este de natură să sdruncine încrederea în exactitatea celor mai elementare adevăruri matematice.

De aceia, este bine să arăt că, de fapt, nepotrivirea rezultatelor cu teoria este numai *aparentă.*

În adevăr, există infinități de torsori echivalenți cu un torsor dat. O mare categorie, din aceștia, obținem grație proprietății următoare, de altfel, cunoscută

Un torsor rămâne echipolent cu el însuș printr'o șurubare (mișcare elicoidală) *dealungul axei sale.*

Este posibil deci ca, în totalitatea soluțiilor ce obținem într'o problemă de reducere, să apară, ca soluții, diferite poziții, ale diadei căutate obținute prin o *șurubare* propriu zisă în jurul axei sale, sau printr'o *translație* sau o *rotație*, cazuri particulare ale șurubării.

Asemenea soluții nu le vom socoti în numărătoarea noastră, zicând... „în afară de o șurubare" (translație, rotație).

Unde însă persistă enigma, este faptul că, nu în toate cazurile apar aceste soluții supranumerare și acest fapt îl explic, de asemeni, prin aceia că datele problemei permit sau nu o deplasare elicoidală, fie ea redusă la o translație, sau rotație, a soluției aflate, generatoare a altor soluții.

În cele ce urmează, voi examina câteva cazuri de reducere, astfel ca să avem exemple de diferite categorii.

2. Înainte de aceasta, însă, voesc să reamintesc câteva rezultate cunoscute, de care este nevoe în cele ce urmează.

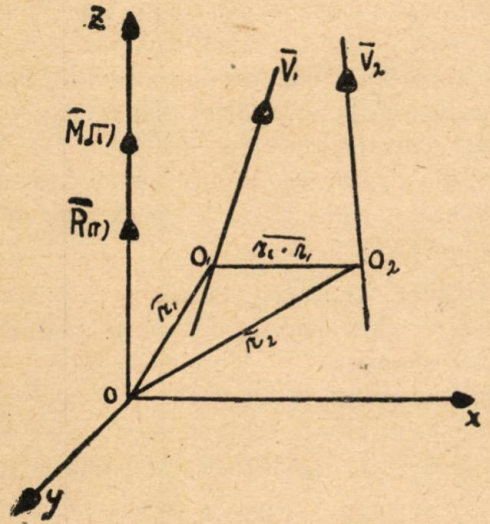
Se știe, astfel, că un torsor se poate reduce, în raport cu un punct O, la un vector liber $\overline{R}_T$, echipolent cu suma geometrică a vectorilor torsorului și la un moment $\overline{M}_0(T)$, egal cu suma momentelor vectorilor torsorului în raport cu O. Momentul este același pentru punctele unei paralele la vectorul liber. Există o dreaptă, printre acestea, *axa torsorului,* în raport cu punctele căreia momentul este paralel cu vectorul liber.

Există, deasemeni, drepte în raport cu care momentul torsorului este nul: acestea fac parte din *complexul lui Chasles* (v. Cursul meu de *Mecanică*) relativ la torsorul dat. Orice dreaptă din spațiu, ori aparține complexului lui *Chasles* relativ la torsorul dat, ori este suportul unuia din vectorii alunecători ai unei diade, echivalente cu torsorul dat. Două drepte se zic *reciproce* față de un torsor, dacă sunt suporturile vectorilor unei diade echivalente cu torsorul dat. Dacă o dreaptă a complexului lui *Chasles* întâlnește o dreaptă ce nu face parte din complex, întâlnește și reciproca sa.

Toate dreptele complexului, care întânesc axa, sunt perpendiculare pe aceasta și reciproc. Orice dreaptă, care întâlnește două drepte reciproce și

axa, este perpendiculară acesteia. Perpendiculara comună a două drepte reciproce întâlneşte axa şi este perpendiculară pe ea.

3. — Fie atunci D_1, D_2 două drepte reciproce faţă de un torsor, pe care se găsesc deci vectorii alunecători $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ ai unei diade echivalente cu torsorul dat, O_1O_2 perpendiculara lor comună, pe care o vom numi-o *braţul* diadei. Dreapta O_1O_2 este perpendiculară pe axa torsorului, pe care o întâlneşte, fiind deci în acelaş plan P. Dreptele D_1 D_2 sunt deci situate în plane perpendiculare pe planul P.



Dacă luăm un punct arbitrar O din spaţiu, ca origine a vectorilor, fie $\overline{r}_1 = \overline{OO_1}$, $\overline{r}_2 = \overline{OO_2}$: echivalenţa diadei cu torsorul dat duce la egalităţile

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{R}_T, \qquad \overline{r_1}\,\overline{V}_1 + \overline{r_2}\overline{V}_2 = \overline{M}_0(T).$$

Rezolvind acest sistem de ecuaţii vectoriale, în raport cu $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, obţinem

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} (\overline{r_2 - r_1})^2 \overline{V}_1 &= (\overline{r_2 - r_1} \cdot \overline{r}_2)\,\overline{R}_T + \overline{(r_2 - r_1)\,M_0(T)}, \\ (\overline{r_1 - r_2})^2 \overline{V}_2 &= (\overline{r_1 - r_2} \cdot \overline{r}_1)\,\overline{R}_T + \overline{(r_1 - r_2)\,M_0(T)}. \end{aligned}$$

De asemeni, mai găsim

$$(\beta)\quad (\overline{R}_T \cdot \overline{V}_1)\,\overline{r}_1 + (\overline{R}_T \cdot \overline{V}_2)\,\overline{r}_2 = (\overline{R}_T \cdot \overline{r}_1)\,\overline{R}_T + \overline{R_T M_0(T)}$$

care, dacă O se află pe axa torsorului ia forma simplă

$$(\gamma)\qquad (\overline{R}_T \cdot \overline{V}_1)\,\overline{r} + (\overline{R}_T \cdot \overline{V}_2)\,\overline{r}_2 = (\overline{R}_T \cdot \overline{r}_1)\,\overline{R}_T,$$

care arată că axa torsorului se află în acelaş plan cu O_1O_2.

4. — Iată, acum, câteva rezultate, în ceiace priveşte reducerea unui torsor la diade.

a. *Un torsor se reduce, într'un singur mod sau nici unul, la o diadă, al cărei braţ este dat, în mărime şi poziţie.*

Dacă braţul dat nu este în acelaş plan cu axa torsorului şi perpendicular pe aceasta, problema nu are soluţie.

În cazul contrar, cunoaştem vectorii $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ iar (α) ne dă câte o singură valoare pentru $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$. Se vede că diada nu poate fi deplasată *elicoidal* dealungul axei sale, căci O_1 şi O_2 sunt fixe.

b. *Un torsor poate fi redus, într'un singur mod sau nici unul, la o diadă, în care cunoaştem suporturile vectorilor alunecători componenţi.*

Căci, cunoscând suporturile, cunoaştem perpendiculara comună O_1O_2, deci vectorii $\overline{r}_1$ şi $\overline{r}_2$, regăsind astfel cazui *a*.

Problema nu este posibilă decât dacă perpendiculara comună a suporturilor este situată în acelaş plan cu axa torsorului şi perpendiculară pe aceasta. În acest caz, avem o singură soluţie, căci suporţii daţi au poziţii fixe în spaţiu

c. *Un torsor poate fi redus, într'un singur mod (în afară de o translaţie dealungul axei), la o diadă, ai cărei vectori alunecători au direcţii date.*

Direcţiile vectorilor diadei dau direcţia perpendicularei lor comune, deci a planului P care conţine axa torsorului şi braţul diadei. Vectorul liber $\overline{R}_T$ se descompune într'un singur fel în doi vectori $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ având direcţiile date; aceştia sunt situaţi într'un plan Q, dus prin axa torsorului, perpendicular pe planul P. Cunoscând mărimea şi direcţia vectorilor $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ suntem în cazul *a*, cu deosebirea însă că, acum, putem da diadei o *translaţie* dealungul axei sale, care nu schimbă direcţia şi mărimea vectorilor săi.

Am găsit, astfel, o simplă infinitate de soluţii, deşi se părea că trebue să obţinem una singură.

d. *Un torsor poate fi redus, într'un singur mod, la o diadă (în afară de o translaţie dealungul axei sale), căreia îi cunoaştem mărimea şi direcţia unuia dintre vectorii alunecători componenţi.*

Căci descompunerea vectorului liber $\overline{R}_T$ în două componente, în care una este cunoscută în mărime şi direcţie, dă o singură mărime şi direcţie pentru cealaltă $\overline{V}_2 = \overline{R}_T - \overline{V}_1$; suntem, astfel, în cazul *b* şi putem, şi aci, da o translaţie diadei obţinute,

fără a schimba direcția și mărimea vectorilor componenți.

5. — Evident, la fiecare caz de descompunere a unui vector $\overline{R}_T$ în două componente, corespunde un caz de reducere a unui torsor dat la o diadă. În această ordine de idei, mai dăm următorul rezultat

e. *Un torsor se poate reduce într'un singur mod sau nici unul (în afară de o șurubare dealungul axei sale) la o diadă, în care cunoaștem mărimile celor doi vectori alunecători ai acesteia.*

Căci descompunerea lui $\overline{R}_T$ în doi vectori de mărimi date se face într'un singur mod, căruia îi corespunde o singură diadă. Descompunerea de mai sus se face într'un plan arbitrar ce trece prin axa torsorului și într'un punct arbitrar al acesteia; la fiecare poziție, astfel aleasă, corespunde câte o diadă. Ori toate pozițiile se obțin din una dintre ele printr'o șurubare, deci...

Problema este posibilă când mărimile vectorilor $\overline{R}_T$, $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ pot fi laturile unui *triunghiu*.

NOTE MATEMATICE

1. — *Solution complète d'un système diophantien.*

Nous nous proposons de trouver toutes les solutions du système diophantien:

$$\left\{\begin{array}{l}
A_1+B_1+C_1=A_2+B_2+C_2=\cdots=A_k+B_k+C_k=t^4\\
\left|\begin{array}{lll}
A_1+B_1 = (u_1+v_1)^4 & A_2+B_2 = (u_2+v_2)^4 & A_k+B_k = (u_k+v_k)^4\\
B_1+C_1 = u_1^4 & B_2+C_2 = u_2^4 & \cdots\quad B_k+C_k = u_k^4\\
A_1+C_1 = v_1^4 & A_2+C_2 = u_2^4 & A_k+C_k = v_k^4
\end{array}\right.\\
D_1+E_1+F_1=D_2+E_2+F_2=\cdots=D_k+E_k+F_k=t^2\\
\left|\begin{array}{lll}
D_1+E_1 = (u_2+v_2)^2 & D_2+E_2+(u_2+v_2)^2 & D_k+E_k = (u_k+v_k)^2\\
E_1+F_1 = u_1^2 & E_2+F_2 = u_2^2 & \cdots\quad E_k+F_k = u_k^2\\
D_1+F_1 = v_1^2 & D_2+F_2 = v_2^2 & D_k+F_k = v_k^2,
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

k étant nu indice pouvant avoir une valeur entière quelconque, supérieure ou égale à l'unité.

On trouve les conditions:

$$\left\{\begin{array}{ll}
(1) & 2t^4=(u_1+v_1)^4+u_1^4+v_1^4=(u_2+v_2)^4+u_2^4+v_2^4=\cdots=(u_k+v_k)^4+u_k^4+v_k^4\\
(2) & 2t^2+(u_1+v_1)^2+u_1^2+v_1^2=(u_2+v_2)^2+u_2^2+v_2^2=\cdots=(u_k+v_k)^2+u_k^2+v_k^2
\end{array}\right.$$

On s'assure aisément du fait que le 1-er groupe de relations est une conséquence du 2^d. On aura finalement

$$t^2=u_1^2+u_1v_1+v_1^2=u_2^2+u_2v_2+v_2^2=\cdots$$
$$=u_k^2+u_kv_k+v_k^2.$$

Pour que t soit une solution du système, il faut et il suffit qu'il soit de la forme u^2+uv+v^2. Ce sont donc les seuls nombres admissibles pour t.

Si $t=\tau^l$, τ étant un nombre premier de la forme u^2+uv+v^2, on aura $k=l$.

On a donc le moyen d'obtenir toutes les solutions entières du système, quelle que soit la valeur de l'indice k.

Nous allons donner *deux exemples*, pour $k=2$ et $k=3$.

$k=2$

$$\left\{\begin{array}{l}
5.699.265+3.451.360-3.385.824=49^4\\
5.570.320+4.264.176-4.069.695=49^4\\
\\
5.699.265+3.451.360. \quad =55^4\\
\qquad\qquad 3.451.360-3.385.824=16^4\\
5.699.265 \qquad -3.385.824=39^4\\
\\
5.570.320+4.264.176 \quad =56^4\\
\qquad\qquad 4.264.176-4.069.695=21^4\\
5.570.320 \qquad -4.069.695=35^4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
2145+880-624=49^2\\
1960+1176-735=49^2\\
\\
2145+880 \quad =55^2\\
\qquad 880-624=16^2\\
2145 \qquad -624=39^2\\
\\
1960+1176 \quad =56^2\\
\qquad 1176-735=21^2\\
1960 \qquad -735=35^2
\end{array}\right.$$

$k=3$

$13.839\,413.040+2.956\,746.960-2.954.872.799=343^4$
$13\,683.935\,265+8.286.715.360-8.129.363\,424=343^4$
$13.374.338.320+10.238.286.575-9.771\,337.695=343^4$

$13.839.413.040+2.956.746.960=360^4$
$2.956.746.960-2.954.872.799=37^4$
$13.839.413.040-2.954\,872.799=323^4$

$13.683.935.265+8.286.715.360=385^4$
$8.286.715.360-8.129.363.424=112^4$
$13.683.935.265-8\text{-}129.363.424=273^4$

$13.374.338.320+10.238\,286\,576=392^4$
$10.238.286\,576-9.771.337.695=147^4$
$13.374.338.320-9.771.337.695=245^4$

$116.280+13.320-11.951=343^2$
$105.105+43.120-30.576=343^2$
$96.040+57.624-36.015=343^2$

$116\,280+13.320=360^2$
$13.320-11.951=37^2$
$116.280-11.951=323^2$

$105\,105+43.120=385^2$
$43.120-30.576=112^2$
$105.105-30.576=273^2$

$96.040+57.624=392^2$
$57.624-36.015=147^2$
$96.040-36.015=245^2$

Le lecteur, désireux de poursuivre l'étude du sujet, obtiendra d'autres exemples, pour $k=2$ et $k=3$, en prenant t égal à 13^2 resp. 13^3.

On peut établir la solution sous forme paramétrique en se basant sur des résultats connus de la théorie des formes quadratiques binaires.

J'ajoute que la considération de ce système diophantien à $(8k+1)$ inconnues et $(8k)$ équations m'a été suggérée par un système que m'avait communiqué M. *Moessner*.

A. GLODEN

---

2. — *Asupra unor identităţi ale lui Euler.*

1. Dacă $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ e o fracţie propriuzisă, dela descompunerea unei fracţii simple, se cunoaşte identitatea:

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\sum_{\substack{a,b,\ldots,l\\ \alpha,\beta,\ldots,\lambda}}\left[\sum_{k=1}^{\alpha}\frac{A_k}{(x-a)^k}\right]+\sum\left[\sum_{k=1}^{\alpha'}\frac{P_k x+Q_k}{(x^2+px+q)^k}\right].$$

În cazul când $\varphi(x)$ admite numai rădăcini reale, *Euler* ne dă relaţiile:[1]

$$\sum\frac{f(a)}{\varphi(a)}=0,$$

când gradul lui $\varphi(x)$ întrece că două unităţi pe acela al lui $f(x)$ şi

$$\sum\frac{f(a)}{\varphi'(a)}=\left[x\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=\infty}$$

când gradul lui $\varphi(x)$ întrece cu o unitate pe a lui $f(x)$.

2. În cele ce urmează, vom presupune cazul când $\varphi(x)$ admite şi rădăcini imaginare, adică fracţia propriuzisă se poate pune sub forma (1).

Înmulţind egalitatea (1) cu x şi făcând apoi pe $x=\infty$, vom putea distinge două cazuri:

a). În cazul când $\varphi(x)$ întrece cu două unităţi gradul lui $f(x)$, se obţine egalitatea

$$(I)\qquad \Sigma A_1+\Sigma P_1=0.$$

b). În cazul când $\varphi(x)$ întrece cu o singură unitate gradul lui $f(x)$, se obţine egalitatea

$$(II)\qquad \Sigma A_1+\Sigma P_1=\left[x\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=\infty}.$$

Relaţiile (I) şi (II) stabilite, ne ajută a verifica coeficienţii desvoltărilor în fracţii simple. În plus, ele ne mai furnizează două clase de identităţi. Astfel, pornind dela fracţiile propriuzise

$$(2)\qquad \frac{x(x-a)}{(x-b)(x-c)(x^2+d^2)},$$

$$(3)\qquad \frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x^2+c^2)},$$

$$(4)\qquad \frac{x^2}{(x-a)(x^2+b^2)}.$$

$$(5)\qquad \frac{x^2(x-a)}{(x-b)(x-c)(x^2+d^2)},$$

obţinem respectiv, identităţile:

$$(2')\qquad \frac{b(b-a)}{(b-c)(b^2+d^2)}+\frac{c(c-a)}{(c-b)(c^2+d^2)}+\frac{d^2(a-b-c)-abc}{(b^2+d^2)(c^2+d^2)}=0,$$

---

1). *V. Alaci*: „Annaliza matematică", partea I, p. 155. Curs lit. de *V. Mioc*

(3′) $$\frac{a^2}{(b-a)(a^2+c^2)}+\frac{b^2}{(a-b)(b^2+c^2)}+\frac{c^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}=0,$$

(4′) $$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1,$$

(5′) $$\frac{b^2(b-a)}{(b-c)(b^2+d^2)}+\frac{c^2(c-a)}{(c-b)(c^2+d^2)}+\frac{d^4+d^2(ab+ac-bc)}{(b^2+d^2)(c^2+d^2)}=1.$$

FLORIAN I. GOGA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, No. 5, Ianuarie 1945. Poliomologia triunghiurilor oarecari, de Cpt. Ing. *I. Zamfirescu* Rezolvarea unui sistem de ecuații, de *D V. Ionescu*. Raport pentru decernarea premiului „*Nicolae G. Botea*", de Prof *C. Ionescu Bujor*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Gazeta Matematică*. Anul L, No. 6, Februarie 1945. Asupra distribuției numerilor prime, de *Tiberiu Popoviciu*. O proprietate funcțională, comună cercului și spiralei logaritmice, de *M. Ghermănescu*. Concursul „Gazeta Matematică" din 1945. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

3. *Michel Ghermănescu*. Sur quelques équations fonctionnelles de *M. D. Pompeiu*. (Bulletin de la Section Scientifique de l'Académié Roumaine, T. XXVI, No. 9).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 612. — *Pe o dreaptă dată se iau patru puncte* A, B, C *și* D *și se unesc aceste puncte cu un punct* M *din plan.*

1° *Să se afle locul geometric al punctelor* M, *astfel ca bisectoarele unghiurilor* A M B *și* C M D *să fie perpendiculare.*

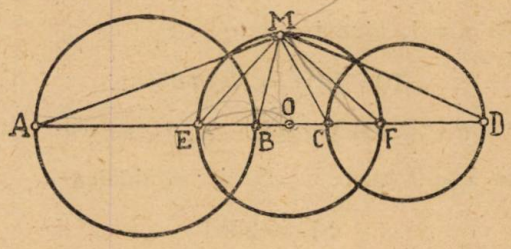
2° *Să se construiască locul găsit.*

GH. CONSTANTINESCU

Soluție. 1°. Fie E și F picioarele bisectoarelor unghiurilor AMB și CMD pe dreapta ABCD. De oarece MF este perpendiculară pe ME, înseamnă că MF este bisectoarea exterioară a unghiului CMD. Punctele E, F divid deci armonic segmentele AB, CD. Fie O mijlocul lui EF. Avem

$$\overline{OE}^2=\overline{OB}\cdot\overline{OA}=\overline{OF}^2=\overline{OC}\cdot\overline{OD}.$$

Această relație arată că O este fix și se găsește pe axul radical al cercurilor de diametre AB și CD, iar punctele E și F sunt fixe. Deci locul lui M este cercul de diametru EF.



2°. Pentru a construi locul, determinăm punctul O, apoi cu o rază egală cu tangenta din O la unul din cercurile de diametru AB sau CD și cu centrul în O construim un cerc, care va trece prin E și F și va fi locul lui M.

Au dat bune soluții analoage D-nii: *Albeață N. Emil* și *Dumitrescu Eugen*.

Problema 1970. — *Să se găsească trei cifre cu care să se formeze un număr de două cifre și patratul de patru cifre al acestuia.*

G-L GH. BUICLIU

Soluție. Fie

(1) $$(xy)^2=abcd$$

numărul de două cifre și patratul său de patru cifre. Grupa de două cifre cd poate fi una din grupele

00; 01; 04; 09; 16; 21; 24; 25; 29; 36; 41; 44; 49; 56; 61; 64; 69; 76; 81; 84; 89; 96.

Introducem în (1) pe rând în locul lui cd pe una din aceste grupe numerice.

1°. $cd=00$. Egalitatea (1) devine

(2) $$(x0)^2=ab00 \quad {}^{*}_{*}{}^{*} \quad x^2=ab,$$

unde x și ab trebue să se scrie numai cu două cifre diferite sau cu un zero și alte două cifre. Observăm că dintre patratele efectiv de două cifre numai

$$5^2=25 \quad \text{și} \quad 6^2=36$$

răspund primei condiții, iar pentru patratele, formal de două cifre, avem soluțiile

$$1^2=01, \quad 2^2=04 \quad \text{și} \quad 3^2=09$$

dintre care prima este neadmisibilă căci împreună cu (2) întrebuințează numai două cifre. Deci în cazul 1° avem următoarele soluții ale problemei

$20^2=0400$; $30^2=0900$; $50^2=2500$; $60^2=3600$.

2°. Fie $cd=01$. Avem din (1)

$(xy)^2=ab01=100\times ab+1$ cu $y=1$ sau 9.

Dacă $y=1$, atunci

$$(10x+1)^2=100ab+1$$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $5x^2+x=5\times ab$ $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $x=5m$

şi cum $x\leqq 9$ luăm $x=5$, dar egalitatea

$$51^2=2601$$

se scrie cu 5 cifre.

Dacă $y=9$ avem, în mod analog

$$5x^2+9x+4=5\times ab,$$

de unde rezultă că

$$9x+4=5x+4(x+1)$$

trebue să se dividă prin 5, ceia ce necesită $x+1=0$ (imposibil) sau $x+1=5$ $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $x=4$, dar $49^2=2401$ nu răspunde enunţului.

3°. $cd=04$ $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $y=2$ sau 8

$(x2)^2=ab\times 100+04$ sau $(x8)^2=ab\times 100+08$,

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $10x^2+4x=10\times ab$ sau $10x^2+5(3x+1)+x+1=10N$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $x=5$ sau $x=4$,

care nu dau soluţii.

Examinând pe această cale toate celelalte cazuri, găsim încă următoarele 4 soluţiuni, pe lângă cele 4 de la cazul 1°:

$63^2=3969$; $64^2=4996$; $76^2=5776$; $88^2=7744$.

Problema admite 8 soluţii dintre care două au membrul al doilea formal de 4 cifre.

D-l *Wegener Eugen* (Bucureşti) a dat 5 soluţii folosindu-se de table de patrate.

Un rezolvitor din Beiuş, al cărui nume nu s-a putut descifra, a găsit, pe calea examinărei terminaţiilor patratelor perfecte, numai soluţia 76^2.

Celelalte soluţiunii primite sunt inacceptabile.

Problema 2176. — *În ce fel de triunghiuri razele cercurilor exînscrise sunt în progresie armonică?*

VALERIA TARTA

Soluţie. Dacă r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise unui triunghiu A B C, atunci conform enunţului trebuie să avem

$$(1)\qquad \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{r_c}.$$

Dar cum avem cunoscute relaţiile

$$r_a=\frac{s}{p-a},\quad r_b=\frac{s}{p-b},\quad r_c=\frac{s}{p-c}$$

(Compléments de Trigonométrie, *p.* 175) relaţia (1), devine

$$\frac{p-a}{s}+\frac{p-b}{s}=\frac{2(p-c)}{s},$$

sau

$$2p-a-b=2p-2c.$$

De aci deducem

$$(2)\qquad c=\frac{a+b}{2}.$$

Deci, *dacă razele cercurilor exîncsrise într'un triunghiu* A B C *sunt în progresie armonică, rezultă din* (2) *că laturile acelui triunghiu trebuie să fie în progresie aritmetică.*

Soluţii bune date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Braşoveanu Gheorghe* (Craiova), *Cotariu D. Marce* (Brăila), *Creţa Gavril* (Polit, Timişoara), *Enache Ion* (Lt. Giurgiu), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Goldiş Gh.* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Maliţa Mircea* (Lic. Beiuş), *Munteanu Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Păläceanu Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Stretea Alexandru* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Observare Dl. *Anton Ioan*, folosind cunoştinţi de Trigonometrie patratică, găseşte că *unghiul asociat* γ trebuie să fie constant, mai precis

$$(3)\qquad sp\,\gamma=\frac{1}{3}.$$

Iată motivarea. Relaţia (2) se poate scrie şi sub forma

$$(4)\qquad 3c=2p.$$

Dar, cum

$$c=2p\,sp\,\gamma,\qquad (\text{„T. p.”, p. 52}).$$

relaţia (4) devine

$$sp\,\gamma=\frac{1}{3},$$

unde γ este unghiul asociat triunghiului A B C corespunzător laturei c, adică este unghiul unui triunghiu dreptunghiu de catete c, $a+b$, care se opune laturei c.

Problema 2185. — *Într'un triunghiu oarecare* A B C, *avem relaţiile*

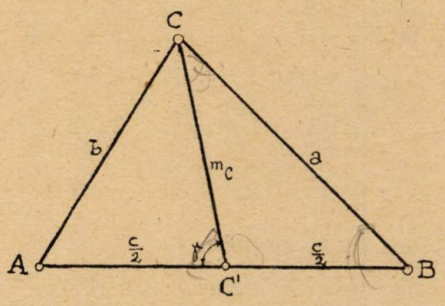
$$m^2\sin 2\gamma=ab\sin(A-B)$$

$$c^2=4[m_c^2\cos 2\gamma+ab\cos(A-B)],$$

unde m_c *este mediana* C C', *iar* $\gamma = \sphericalangle$ A C'C, *restul notaţiilor fiind obicinuit.*

V. ALACI

Soluţie. Fie C' piciorul medianei m_c şi $\sphericalangle$AC'C$=\gamma$, atunci avem $\sphericalangle$ C C' B $= 180^0 - \gamma$.



Din triunghiul A C C', prin aplicarea *teoremelor simusului şi cosinusului,* avem respectiv

(1) $$m_c \sin\gamma = b \sin A$$

(2) $$c = 2b\cos A + 2m_c \cos\gamma,$$

dar cum pe de altă parte

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

relaţia (2) ne dă

(3) $$2m_c \cos\gamma = a\cos B - b\cos A.$$

Inmulţind relaţiile (1) şi (3) rezultă

$$m_c^2 \sin 2\gamma = ab\sin A\cos B - b^2 \sin A\cos A$$

şi cum

(4) $$\sin A = \frac{a\sin B}{b},$$

obţinem mai departe

$$m_c^2 \sin 2\gamma = ab\sin A\cos B - ab\cos A\sin B$$
$$= ab(\sin A\cos B - \cos A\sin B) = ab\sin(A-B).$$

Avem astfel stabilită prima relaţie.

Trecem acum la stabilirea celei de a 2-a relaţii.

Pentru aceasta observăm că în triunghiurile A C C' şi C' C B putem scri relaţiile,

$$c = 2b\cos A + 2m_c\cos\gamma$$

$$c = 2a\cos B + 2m_c\cos(180^0 - \gamma) = 2a\cos B - 2m_c\cos\gamma,$$

pe care înmulţindu-le, obţinem

$$c^2 = 4[-m_c^2\cos^2\gamma + ab\cos A\cos B +$$
$$m_c\cos\gamma(a\cos B - b\cos A)],$$

care în virtutea relaţiei (3) devine

$$c^2 = 4(m_c^2\cos^2\gamma + ab\cos A\cos B) =$$
$$4m_c^2\cos 2\gamma + m^2\sin^2\gamma + ab\cos A\cos B.$$

Având acum în vedere relaţiile (1) şi (4), putem scri mai departe

$$c^2 = 4(m_c^2\cos 2\gamma + b^2\sin^2 A + ab\cos A\cos B)$$
$$= 4(m_c^2\cos 2\gamma + ab\sin A\sin B + ab\cos A\cos B)$$
$$= 4[m_c^2\cos 2\gamma + ab\cos(A-B)],$$

astfel şi a 2-a relaţie este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Birănaş Ioan* (Arad), *Bolcas Victor* (Beiuş), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *David Vasile* (student), *Enache Ioan* (Slt), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Hendli Martin* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Maliţa Mircea* (Lic, Beiuş), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Pat Moise* (Polit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Stretea Alexandru* (Polit, Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş), *Vişa Eugen* (Profesor, Bucureşti), şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2192. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare, avem relaţia*

$$\sum \frac{(a^2-b^2)\sin C}{c^2\sin(A-B)} = 3.$$

M. GH. SABAU

Soluţie. Ţinând seamă că într'un triunghiu ABC, avem relaţiile cunoscute

$$a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$$

şi având în vedere unele transformări şi simplificări, putem scri succesiv

$$\frac{(a^2-b^2)\sin C}{c^2\sin(A-B)} = \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)\sin C}{4R^2\sin^2 C\sin(A-B)} =$$
$$\frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{\sin C\sin(A-B)} =$$
$$\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin(A+B)\sin(A-B)} =$$
$$\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin(A+B)\sin(A-B)} = 1.$$

Prin urmare rezultă

$$\sum \frac{(a^2-b^2)\sin C}{c^2\sin(A-B)} = 3,$$

adică tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-ra: *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Bolcaş Victor* (Beiuş), *Bosie V. Boris* (Polit., Timişoara), *Braşoveanu Gh.* (Lic. T-Severin), *Chiriac C-tin* (Lt.) *Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila), *Costea D. Florian* (Lic. Beiuş), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Cristache Avram* (Lic. Brăila), *Gâţa Gheorghe* (Lic. T-Jiu), *Giurconiu Mihai* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), Dr *A. Gloden* (Luxenburg), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Goldiş S.* (Polit., Timişoara). *Grozescu Liviu* (Polit, Timişoara), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Maliţa A. Mircea* (Lic. Beiuş), *Munteanu Lucian* (Polit, Timişoara), *Pat Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Rothenstein Berhard* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petru* (Polit., Timişoara), *Tincu C C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor I. Aurel* (Lic. Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit, Timişoara), *Vrânceanu Gh. Gheorghe* (Lic Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2196. — *Se dau numerele*

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}},\ \sqrt{2+\sqrt{3}},\ -\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}.$$

Să se arate că suma acestor numere este $\frac{5}{\sqrt{2}}$, *iar suma produselor lor câte două este* $\frac{10}{3}$.

V. ALACI

Soluţia 1-a. Observăm că

$$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}\pm1)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}},$$

astfel că şirul dat se poate scri

$$(1)\quad \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}},\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}.$$

1. Efectuând întâi suma acestor numere, avem succesiv

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Am găsit că suma numerelor date este conform enunţului, $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

2. Să facem acum suma produselor câte două a numerelor date, sau a celor din şirul (1), avem succesiv strângând apoi termenii cu acelaşi numitor

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+$$
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}+\frac{4+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{2\sqrt{3}}+\frac{2}{6}-\frac{2}{2}+$$
$$\frac{2}{2\sqrt{3}}-\frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}+\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+$$
$$\frac{1}{3}-1=1+1+2+\frac{1}{3}-1=\frac{10}{3},$$

tocmai cum cerea enunţul.

Soluţi date de d-rele *Măran I. Ana* (Polit., Timişoara), *Tarţa Valeria* (Polit, Timişoara) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit, Timişoara), *Bică Emilian* (Braşov), *Birănaş Ioan* (Arad), *Bolcaş Victor* (Lic. Beiuş), *Bossie V. Boris* (Polit., Timişoara), *Braşoveanu Gheorghe* (Lic. T-Severin), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin* (Lt), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Dobrescu Ilie* (Lic. Caracal), *Dumitrescu Ilie* (Reşiţa), *Enache Ioan* (Slt), *Filimon Ioan* (Lic. Milit, Timişoara), *Gâţă Gheorghe* (Tg-Jiu), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timişoara), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Groza Liviu* (Polit., Timişoara), *Munteanu Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Pat Moise* (Polit., Timişoara), *Petrovici Adalbert* (Lic. Brad), *Pop Emil* (Polit, Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Rogoz Ioan* (Lic. Milit, Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Streja Iorga* (Lic., Milit, Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga Timişoara), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit, Timişoara) şi *Vrânceanu Gh.* (Lic. Milit., Timişoara).

Soluţia 2-a. Ecuaţia care are ca rădăcini numerele date în enunţ, sau acelea din şirul (1) din soluţia precedentă, se poate scri succesiv

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times$$
$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=$$
$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{6}\right]\left[x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{3}{2}\right]=$$
$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+\frac{1}{3}\right)(x^2-\sqrt{2}\,x-1)=$$
$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x^4-2\sqrt{2}\,x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}x-\frac{1}{3}\right)=$$
$$x^5-\frac{5}{\sqrt{2}}x^4+\frac{10}{3}x^3-x+\frac{1}{\sqrt{2}}=0,$$

sau

(2) $3\sqrt{2}\,x^5 - 15\,x^4 + 10\sqrt{2}\,x^3 - 3\sqrt{2}\,x + 1 = 0.$

Folosind acum relaţiile lui *Newton* între rădăcinele şi coeficienţii unei ecuaţii, putem scri cu privire la ecuaţia (2)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5 = \frac{10}{3},$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sunt tocmai numerele date în enunţ.

În felul aceasta problema este rezolvată.

Dl. *Simcso Carol* (Polit, Timişoara), a avut aceiaşi idee, dar folosind direct numerele date şi nu cele sub forma mai simplă (1) din prima soluţie, a avut de efectuat calcule mult mai complicate.

Observare. Atât ecuaţia (2) cât şi rădăcinele sale, se găsesc în articolul autorului, *„Asupra unor clase de ecuaţii algebrice cu rădăcini trigonometrice"*, „R.M.T", Vol. IX, p.116.

Problema 2198. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} 2x(x+y^2) = x^2 + y \\ 2y(x^2+y) = x + y^2. \end{cases}$$

EUGEN WEGENER

Soluţie. Sistemul dat se poate pune sub forma

(1) $$\begin{cases} x^2 + 2xy^2 = y \\ y^2 + 2yx^2 = x. \end{cases}$$

Adunând şi scăzând aceste ecuaţii, avem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy(x+y) = x + y \\ x^2 - y^2 + 2xy(y-x) = y - x, \end{cases}$$

sau sub altă formă,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x+y)(1 - 2xy) \\ (y-x)(2xy - x - y - 1) = 0. \end{cases}$$

Acest sistem este, evident, echivalent cu următoarele două sisteme

(I) $$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = (x+y)(1 - 2xy), \end{cases}$$

(II) $$\begin{cases} 2xy = x + y + 1 \\ x^2 + y^2 = (x+y)(1 - 2xy). \end{cases}$$

Să rezolvăm pe rând sistemele (I) şi (II).

Rezolvarea sistemului (I).

Din prima ecuaţie din (I), avem $y = x$, astfel că ecuaţia 2-a din (I) devine

$$2x^2 = 2x(1 - 2x^2), \quad \text{sau} \quad x(2x^2 + x - 1) = 0,$$

deci $$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că sistemul (I), admite următoarele sisteme de soluţii

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = -1, \quad x_3 = y_3 = \frac{1}{2}.$$

Rezolvarea sistemului (II).

Ecuaţia 2-a din (II) se mai poate scri

(3) $$(x+y)^2 - 2xy = (x+y)(1 - 2xy),$$

în care înlocuind pe $2xy$ prin valoarea sa din prima ecuaţie din (II), obţinem

$$(x+y)^2 - (x+y) - 1 = -(x+y)^2,$$

sau

$$2(x+y)^2 - (x+y) - 1 = 0.$$

De aci deducem

$$x + y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

deci

$$x + y = 1 \quad \text{şi} \quad x + y = -\frac{1}{2}.$$

Înlocuind aceste valori în prima ecuaţie din (II), găsim respectiv

$$xy = 1 \quad \text{şi} \quad xy = \frac{1}{4}.$$

Rezultă că sistemul (II) este echivalent cu sistemele

(A) $$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 1, \end{cases}$$ (B) $$\begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Având cunoscute suma şi produsul, rezultă că x, y din (A) şi (B) sunt respectiv rădăcini ale ecuaţiilor

$$t^2 - t + 1 = 0, \quad 4t^2 + 2t + 1 = 0,$$

de unde deducem

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ y_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ y_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

$$\begin{cases} x_6 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4} \\ y_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{4} \\ y_7 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Soluții date de d-ra *Măran Ana* (Polit., Timișoara) și de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Birănaș Ioan* (Lic. Brad), *Bossie Boris* (Polit., Timișoara), *Bolcaș Victor* (Lic. Beiuș), *Brașoveanu Gheorghe* (Lic. T-Severin), *Chiriac C-tin* (Lic. Beiuș), *Constantinescu Ilie* (lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Creța Gavril* (Polit., Timișoara), *Enache Ion* (Lt.), *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timișoara). *Giurconiu Mihail* (Lic. Tg-Jiu), *Godea Ioan* (Polit, Timișoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timișoara) *Mahrenholz Ióhannes* (Cottbus), *Miclea Nicolae* (Alba Iulia), *Muțiu Antim* (Polit., Timișoara), *Paștea Liviu* (Făgăraș), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timișoara), *Rotenstein Bernhard* (Polit., Timișoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timișoara), *Serengău Mihai* (Lic. Loga Timișoara), *Tincu Constantin* (Lic. Loga, Timișoara), *Tutor Aurel* (Făgăraș) *și Țigănoiu Alexandru* (Polit., Timișoara).

Problema 2236. — *Să se determine a și b astfel ca ecuația*

$$x^4 + a\,x^3 - 8\,x + b = o$$

să admită două rădăcini duble. In urmă, să se rezolve ecuația.

LT. MIRCEA GRUMAZESCU

Soluție. Fie m, n rădăcinele ecuației date, trebuie să avem

$$x^4 + a\,x^3 - 8\,x + b \equiv$$
$$(x-m)^2\,(x-n)^2 = (x^2 - 2\,m\,x + m^2)\,(x^2 - 2\,n\,x + n^2)$$

Identificând coeficienții aceloraşi puteri ale lui x, obținem

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\,(m+n) = -\,a \\ (m+n)^2 + 2\,m\,n = 0 \\ 2\,m\,n\,(m+n) = 8 \\ m^2\,n^2 = b \end{cases}$$

Cum, din prima relație avem,

$$(2)\qquad m + n = -\,\frac{a}{2},$$

înlocuind-o în celelalte relații din (1), găsim

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{a^2}{4} + 2\,m\,n = 0 \\ -\,a\,m\,n = 8 \\ m^2\,n^2 = b \end{cases}$$

Din a 2-a relație din (3) deducem

$$(4)\qquad m\,n = -\,\frac{8}{a},$$

și înlocuind-o în celelalte relații din (3), avem

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{16}{a} = 0 \\ \dfrac{64}{a^2} = b = a, \quad \left(\text{findcă } \dfrac{a^2}{64} = \dfrac{1}{a}\right) \end{cases}$$

De aci deducem

$$(6)\qquad \begin{cases} a^3 = 64 \\ b = a \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem, găsim

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = 2(-1 + i\sqrt{3}) \\ b_2 = 2(-1 - i\sqrt{3}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = 2(-1 - i\sqrt{3}) \\ b_3 = 2(-1 - i\sqrt{3}) \end{cases} \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Am determinat astfel pentru a și b sistemele de valori date de relațiile (7), în virtutea cărora ecuația dată ia una din formele

$$(8)\qquad x^4 + 4\,x^3 - 8\,x + 4 = 0,$$

$$(9)\qquad x^4 - 2\,(1 - i\sqrt{3})\,x^3 - 8\,x + 2\,(1 - i\sqrt{3}) = 0,$$

$$(10)\qquad x^4 - 2\,(1 + i\sqrt{3})\,x^3 - 8\,x + 2\,(1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

Rămâne să rezolvăm aceste ecuații despre care știm, din cele expuse, că au rădăcinele duble m, n.

Pentru aceasta, ținând seamă de relațiile (2) și (4) și de relațiile (7), avem

$$(8')\qquad \begin{cases} m + n = -2 \\ m + n = -2, \end{cases}$$

$$(9')\qquad \begin{cases} m + n = 1 - i\sqrt{3} \\ m\,n = \dfrac{4}{-1 + i\sqrt{3}} = 1 + i\sqrt{3}, \end{cases}$$

$$(10')\qquad \begin{cases} m + n = 1 + i\sqrt{3} \\ m\,n = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Având astfel cunoscute suma și produsul rădăcinelor, rezultă că rădăcinele duble ale ecuațiilor (8), (9) și (10) sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor

$$(8'')\qquad t^2 + 2\,t - 2 = 0,$$

$$(9'')\qquad t^2 - (1 - i\sqrt{3})\,t + 1 + i\sqrt{3} = 0,$$

$$(10'')\qquad t^2 - (1 - i\sqrt{3})\,t + 1 - i\sqrt{3} = 0.$$

Rădăcinele m, n ale acestor ecuații, rădăcini duble respectiv pentru ecuațiile (8), (9) și (10), sunt următoarele

$$m, n = -1 \pm \sqrt{3},$$

$$m, n = \frac{1 - i\sqrt{3} \pm \sqrt{-6\,(1 + i\sqrt{3})}}{2},$$

$$m, n = \frac{1 + i\sqrt{3} \pm \sqrt{-6\,(1 - i\sqrt{3})}}{2}.$$

Soluții date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Barbu Ion* (Lic. Caracal), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Dăscălescu Hristache* (R-Sărat), *Enache I. Ion* (Lt. pe front), *Stanciu Petre* (Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara) și *Wegener Eugen* București).

Problema 2237. — *Să se determine a, astfel ca să existe relaţia*

$$(S_3+S_1)(S_4-3S_2)=(S_4+S_2)(S_3-aS_1),$$

unde

$$S_p=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p.$$

AL ŢIGANOIU

Soluţie. Putem pune relaţia dată sub formă

$$\frac{S_3+S_1}{S_4+S_2}=\frac{S_3-aS_1}{S_4-3S_2}$$

şi aplicând o proprietate a proporţiilor, avem

$$(1)\quad \frac{S_3+S_1}{S_4+S_2}=\frac{S_3+S_1-S_3+aS_1}{S_4+S_2-S_4+3S_2}=\frac{S_1}{S_2},\ \frac{a+1}{4}.$$

Ţinând seamă că avem cunoscute relaţiile

$$S_3=S_1^2,\quad S_4=\frac{3n^2+3n-1}{5}S_2,\quad \text{(Hütte, p. 69)}$$

relaţia (1) devine

$$\frac{S_1^2+S_1}{\frac{3n^2+3n-1}{5}S_2+S_2}=\frac{S_1}{S_2},\ \frac{a+1}{4},$$

sau simplificând prin $\frac{S_1}{S_2}$, obţinem

$$(2)\quad \frac{5(S_1+1)}{3n^2+3n+4}=\frac{a+1}{4}.$$

Cum $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$, relaţia (2) devine

$$\frac{5(n^2+n+2)}{2(3n^2+3n+4}=\frac{a+1}{4}$$

De aci deducem

$$a=\frac{10n^2+10n+20}{3n^2+3n+4}-1=\frac{7n^2+7n+16}{3n^2+3n+4}.$$

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu A. Ion* (Lic. Caracal), *Birănas Ioan* (Lic. Arad), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Costea Fl.* (Lic. Beiuş), *Dăscălescu Hirstache* (R-Sărat), *Godea I.* (Polit, Timişoara), *Goldis Gh.* (Lic. Beiuş), *Munteanu Lucian* (Polit, Timişoara), *Stanciu Petre* (Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga Timişoara), *Vrânceanu Gheorghe* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2305. — Dându-se ecuaţia

$$x^3+px+q=0$$

cu rădăcinile $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, să se formeze ecuaţia care are ca rădăcini $\sec^2\alpha$, $\sec^2\beta$, $\sec^2\gamma$.

CPT. M GRUMAZESCU

2306. — Să se demonstreze că dacă

$$\alpha^2+\beta^2-r^2=0,$$

atunci suma

$$[\beta^2r^2-(r^2-a\alpha)^2]x^2+2\alpha\beta(r^2-a\alpha)xy+\beta^2(r^2-a^2)y^2-2a\beta^2r^2x-2\beta(r^2-a\alpha)r^2y+a^2\beta^2r^2+(r^2-a\alpha)^2r^2$$

se divide prin

$$\alpha x+\beta y-r^2.$$

G-L GH. BUICLIU

2307. — Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$\Sigma x^3+\Sigma x(y^2+z^2)=u(x+y+z)+3xyz,$$

unde prin semnul Σ se înţelege suma termenilor obţinute prin permutările circulare ale celor trei necunoscute x, y şi z. FLORIAN GOGA

2308. — Se dă polinomul

$$f(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz.$$

Să se arate că dacă expresiile $f(0,-r,q)$, $f(-r,0,p)$, $f(-q,p,0)$, $f(0,-r_1,q_1)$, $f(-r_1,0,p_1)$ se anulează, atunci şi

$$f(-q_1,p_1,0)=0.$$

Să se arate că în acest caz,

$$f(x,y,z)=(xp+yq+zr)(xp_1+yq_1+zr_1).$$

MARIA NEUMANN

2309. — Să se construiască ecuaţia algebrică care are rădăcinele

$$x=\sin^2\frac{k\pi}{n}+a\cos^2\frac{k\pi}{n}+\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n},$$

unde $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Caz particular $a=1$.

V. ALACI

2310. — Să se calculeze derivatele funcţiilor

$$y=\arccos\frac{b^2+a^2-2x^2}{b^2-a^2},\qquad z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-a^3}{b^2-a^2}}$$

şi să explice rezultatul. E. LONDON

2311. — Să se dezvolte sub formă calculabilă prin logaritmi determinantul

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\operatorname{cosec}^2A-1} & \operatorname{cotg}B & \operatorname{cotg}C \\ \sum\frac{r}{3p}\operatorname{cotg}\frac{A}{2} & \sum\left(1-\frac{\cos C}{\sin A\sin B}\right) & 1 \\ \operatorname{tg}A & \operatorname{tg}B & \frac{2\sin^2(A+B)}{\sin 2C} \end{vmatrix},$$

unde A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu.

M. GIURCONIU

2312. — Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile

$$\sin\alpha\sin(\theta+\alpha)-\sin\beta\sin(\theta+\beta)$$
$$\cos\alpha\sin(\theta+\alpha)-\cos\beta\sin(\theta+\beta).$$

Să se arate apoi ce devin formulele găsite când se înlocueşte θ prin $\theta+\frac{\pi}{2}$.

EUGEN VISA

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. *Abramescu N.*, Doctor în matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
2. *Adam D. R*, Sublocotenent de geniu, Strada M. Cogălniceanu 31 Bucureşti.
3. *Adamescu M.*, Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, Bucureşti.
4. *Alaci V.*, Doctor în Matematici, Profesor la Politechnică, Timişoara.
5. *Alaci V. Victor*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timişoara.
6. *Almăjan P.*, Locotenent, Licenţiat în Matematici, Strada Zaharia 23, Bucureşti.
7. *Ambruş Fr.*, Inginer, Asistent, Polit., Timişoara.
8. *Anastasiade I.*, Inginer, Profesor pensionar, Politehnica, Timişoara.
9. *Andronescu P.*, Doctor-Inginer, Profesor de Eletrotehnică la Politechnică.
10. *Angheluţă Th.*, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
11. *Ardelean Şt.*, Inginer, Director şi Profesor, Liceul Industrial Timişoara.
12. *Arghiriade Em.*, Doctor în Matematici, Conferenţiar de Matematici Generale la Polit., Timişoara.
13. *Baidaff B. I.*, Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560)
14. *Băncilă Gh.*, Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
15. *Bădescu Radu.*, Doctor în Matematici, Profesor la Facultatea de Agronomie, Bucureşti.
16. *Bakonny C.*, Inginer, Profesor de Tehnologie la Politehnica Timişoara.
17. *Bănărescu M.*, Inginer, Inspector de Control C. F. R., Profesor la Politehnică, Rectorul Politehnicei din Timişoara.
18. *Bărglăzan A.*, Doctor Inginer, Profesor la Maşini Hidraulice, dela Politehnica Timişoara.
19. *Baron C.*, Şef de lucrări la catedra de Fizică dela Politehnică, Timişoara.
20. *Beneş Paul*, Profesor la Liceul Schewitz - Thierrin, Bucureşti
21. *Brătucu C.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timişoara.
22. *Berindean V.*, Inginer, Asistent Polit. Timişoara.
23. *Berzănescu A.*, Inginer, Asistent Polit. Timişoara.
24. *Blaşian V.*, Inginer de Mine, Profesor onorar la Politehnică, Timişoara.
25. *Bobârnac M.*, Inginer, Societatea Astra, Braşov.
26. *Bonea I.*, Director de studii şi Profesor la Toporgafie şi Geodezie, Politehnică, Timişoara.
27. *Botez M.*, Doctor în Matematici, Conferenţiar de Geometrie Descriptivă şi Stereotomie la Politehnica Gh. Asachi, Iaşi.
28. *Boşian O.*, Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
29. *Buicliu Gh.*, General de Artilerie, fost 10 ani Profesor de Geometrie Analitică la Şcoala Politehnică din Timişoara. Insărcinat cu conferinţa de Balistică Exterioară la Politehnica din Bucureşti, Strada M. Cogălniceanu 10, Bucureşti II.
30. *Bumbu V.*, Inginer, Conferenţiar Politeh., Timişoara.
31. *Câlniceanu C.*, Inginer, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
32. *Chiriţescu N.*, Inginer, asistent la Politehnica din Timişoara.
33. *Călugăreanu George*, Doctor în Matematici, Profesor de Teoria Funcţiilor la Universitatea din Cluj (Timişoara.
34. *Cândea C.*, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
35. *Catona V.*, Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Politehnica din Timişoara.
36. *Cătuneanu C.*, Inginer, Profesor Polit., Timişoara.
37. *Ciobanu V.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timişoara.
38. *Cioclov N.*, Inginer, asistent la Politehnica din Timişoara.
39. *Claudian Virgil*, Profesor la Liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
40. *Coca A.*, Licenţiat în Litere. Lector de Limba engleză la Politehnica din Timişoara.
41. *Coman A.*, Profesor onorific la Politehnică şi la liceul Diaconovici Loga din Timişoara
42. *Cămănescu A.*, Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul din T.-Măgurele.
43. *Constantinescu G. G.*, Doctor în Matematici, Bucureşti.
44. *Constantinescu Gh.* Profesor la Liceul Lazăr, Bucureşti.
45. *Contrea A.*, Doctor în Ştiinţe Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Politehnica din Timişoara.
46. *Costăchescu V. C.*, Căpitan de Marină, Constanţa.
47. *Cristescu I.*, Inginer, Profesor onorar la Politehnica din Timişoara.
48. *Cristodorescu Gh.*, Inginer, Asist. la Polit. Timişoara
49. *Cristodulo N.*, Licenţiat in Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Politehnica din Timişoara
50. *Cserveny I.*, Inginer U. D. R. Reşiţa.
51. *Curea I.*, Doctor în Matematici, Conferenţiar de Matematici Generale şi mecanică la Facultatea de Agronomie, Timişoara.
52. *Demetrescu Gh.*, Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
53. *Diaconescu N.*, Profesor la Liceul din Slatina.
54. *Dimitriu Gh*, Inginer, Conferenţiar Politehnica Timişoara.
55. *Dinculescu C*, Inginer, Profesor Polit., Timişoara.
56. *Dobrescu F.*, Inginer, Asistentă Polit. Timişoara.
57. *Dumitriu-Dada*, Profesor la Colegiul Carol I. Craiova.
58. *Filipescu Miltiade*, Doctor, Profesor Politehnica Timişoara.
59. *Florescu M.*, Inginer, Inspector Silvic, Strada A. Orescu 9, Bucureşti.
60. *Fratici I.*, Inginer Asistent la Politehnica din Timişoara.
61. *Fridlovsky A.*, Asistentă Politehnica Timişoara.
62. *Georgescu D.*, Profesor la Liceul din Piteşti.

63. *Gheorghiu Th. Gh.* Doctor în Matematici, Profesor de Geometrie Descriptivă la Politehnica din Timişoara.
64. *Gheorghiu V.*, Inginer, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
65. *Ghermănescu M.*, Doctor în Matematici, Profesor la catedra de Mecanică, Politehnica, Timişoara.
66. *Ghiţescu Spiridon*, Profesor secundar, Bucureşti.
67 *Ghiţescu Virgil*, Profesor secundar Braşov, str. Dorobanţilor No. 5.
68. *Ghircoiaşiu V. Nicolae*, Asistent la Facultatea de Ştiinţă, Timişoara.
69. *Gloden A.*, Doctor în Matematici, Profesor à l'Athènèe, Rue Jean Jaurés 11. Luxemburg.
70. *Grumăzescu Mircea*, Căpitan str. Spiru Gheorghiu 28, Bucureşti.
71. *Hermann V.*, Licenţiat în Matematici, comuna Baia, Judeţul, Arad.
72. *Hofer O.*, Profesor lic. Diaconovici Loga, Asistent Politehnica Timişoara.
73. *Honae C.*, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
74. *Hristea H.*, Inginer-Inspector General la C. F. R.
75. *Iasinski N.*, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
76. *Ionescu-Biss P. H.*, Licenţiaţ în Matamatici, Bucureşti.
77. *Ionescu Bujor C-tin*, Licenţiat în Matematici, Directorul Liceului din Buftea.
78. *Ionescu D. V.*, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor în Timişoara.
79. *Ionescu-Ţiu D. C.*, Căpitan, Licenţiat în Matematici, Calea Griviţei 158, Bucureşti.
80. *Ivănesu Cezar*, Profesor Liceul Militar, Târgovişte.
81. *Jivănescu St.*, Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
82. *Juncu N.*. Inginer, asistent la Politehnica din Timişoara.
83. *Kielburger M.*, Inginer, Şef de lucrări pe lângă Catedra de Electrotehnică la Politehnica, Timişoara.
84. *Kühn I.*, Doctor în Chimie, Şef de lucrări pe lângă Catedra de Chimie Generală la Politehnica din Timişoara.
85. *Lascu Bal*, Licenţiat în Matematici, prepararator la Facultatea de ştiinţe din Cluj (Timişoara).
86. *Laţiu V.*, Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie la Politehnica din Timişoara.
87. *Leonida D.*, Inginer, Profesor la Politehnica din Bucureşti.
88. *Linteş I.*, Comandor Doctor Inginer, Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.
89. *Liteanu Gh.* General de Artilerie, Bucureşti.
90. *Lupan A.*, Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
91. *Macovschi Eug.*. Doctor în Chimie, Profesor la Facultatea de Ştiinţe, Bucureşti.
92. *Maior Nic.*, Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
93. *Manughevici C.*, Inginer-Chimist, şef de Lucrări la Politehnica din Timişoara.
94. *Mardan D.*, Inspector General, Profesor la Politehnica din Timişoara.
95. *Mărculescu Origen*, Profesor la Colegiul „Carol I" Craiova.
96 *Marinescu I*, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
97. *Mateescu S.*, Doctor în Ştiinţe Naturale, Profesor onorar, Timişoara.
98. *Mătieş V. I.*, Profesor la Liceul din Blaj.
99. *Mereuţă Emilian*, Licenţiat în Matematici, Strada Vatra Luminoasă 89, Bucureşti IV.
100 *Milcovean D.*, Doctor-Inginer, Asistent Politehnica Timişoara.
101. *Mihăileanu N. N.*, Profesor secundar, Bucureşti.
102. *Mioc V.*, Licenţiat în Matematicii Directorul Liceului Loga, Asistent pe lângă Catedra de Analiza Matematică la Politehnica din Timişoara.
103. *Murariu P.*, Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara şi Asistent la Polit., Timişoara.
104. *Murgulescu Elena*, Licenţiată în Matematici, Asistentă la Politehnica din Timişoara.
105. *Murgulescu G. I.*, Doctor în Chimie, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
106. *Musta Ştefan*, Profesor secundar, Strada Pavel 4. Beiuş.
107. *Nadaşan Şt.*, Doctor-Inginer, Profesor la Catedra de Rezistenţa Materialelor la Politehnica din Timişoara.
108. *Naneş Gh.*, Profesor pensionar, Bucureşti.
109. *Nicolau A.*, Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
110. *Nicolau P.*, Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
111. *Ogrin N.*, Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
112. *Oltenschi I.*, Inginer, Profesor Polit., Timlşoara.
113. *Onicescu O.*. Doctor, în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Strada Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
114. *Orăşeanu C.*, Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Politehnica din Bucureşti.
115. *Orăşanu Gr.*, Profesor secundar, Bucureşti.
116. *Patriciu Valeriu*, Doctor, Profesor la Catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte la Politehnica din Timişoara.
117. *Petrescu A.*, Profesor onorar, Bucureşti.
118. *Poboran I. V.*, Inginer, Profesor Polit., Timişoara.
119. *Pop Em.*, Asistent Politehnica, Timişoara.
120. *Pop V.*, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
121. *Popa N.*, Inginer, Asist. Polit., Timişoara.
122. *Popescu., E.*, Doctor în Chimie, Profesor la Politehnica, Bucureşti.
123. *Popescu Eug.*, Inginer, Asistent, Ia Politehnica din Timişoara.
124. *Popescu I.*, Inginer, Profesor de Maşini Miniere la Politehnica din Timişoara.
125. *Popescu N. Corneliu*, Profesor, Călăraşi.
126. *Predoescu I. M.*, Inginer la Societatea „Astra Română", Judeţul Prahova şi Asistent la Polit., Timişoara
127. *Pretorian Şt.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timişoara.
128. *Protopopescu I.*, Inginer-Şef, Profesor la Politehnica din Timişoara.
129. *Purcariu I.*, Doctor în Fizică. Profesor la Academia Comercială din Bucureşti.
130. *Purcariu I.*, Inginer, Asistent Polit. Timişoara.

131. *Porumb N.*, Inginer, Conferenţiar Polit., Timişoara
132. *Racliş N. R.*, Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.
133. *Răduleţ R.*, Doctor-Inginer, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
134. *Roibănescu C.*, Profesor, Bucureşti.
135. *Roman I.*, Inginer, Asistent la Politehnica Timişoara.
136. *Sauciuc L.*, Doctor în Chimie, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
137. *Safirescu D.*, Magistrat, Conferenţiar Politehnica Timişoara.
138. *Sălceanu C.*, Doctor în Fizică, Profesor, Politehnica Timişoara.
139. *Sarmeş I.*, Inginer, Asistent, Polit. Timişoara.
140. *Savin C. Ion*, Licenţiat în Matematici, Strada Sărăriei 56, Iaşi.
141. *Savi Gh.*, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
142. *Schram Edith*, Inginer, Timişoara.
143. *Schileriu I.*, Inginer, Profesor Polit., Timişoara, Director General la P. T. T.
144. *Scărlătescu D.*, Inginer, Profesor la Liceul Industria din Timişoara.
145. *Sergescu P.*, Doctor în Matematici, Licenţiat în Filosofie, Profesor la Politehnica din Bucureşti.
146. *Severineanu C.*, Inginer-Şef, Inspector General C.F.R., Profesor, la Politehnica Timişoara.
147. *Silaş Gh.*, Profesor Lic. Industrial, Asistent Politehnica Timişoara.
148. *Simionescu D. Gh.*, Licenţiat în Matematici, Profesor secundar şi Inspector Şcolar, Bucureşti.
149. *Smighelschi O.*, Inginer la Fabrica „Nitrogen" Dicio-Sân-Martin.
150. *Stamatescu I.*, Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
151. *Stambuleanu A.*, Doctor-Inginer, Conferenţiar la Politehnică, Timişoara.
152. *Stamate I. Ionel*, Licenţiat, în Matematici, Profesor la Liceul Militar „Mihai Viteazul" Timişoara,
153. *Stan A.*, Căpitan de Artilerie, Licenţiat Matematici, Bucureşti.
154. *Stăncescu C.*, Doctor-Inginer, Profesor onorar la Politehnica Timişoara.
15. *Stantzel E.*, Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Politehnica, Timişoara.
156. *Stoicescu L.* Inginer, Profesor de Fizică Industrială la Politehnica din Timişoara.
157. *Stoicescu M.*, Profesor şi Director la Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.
158. *Suba P.*, Inginer, Asistent la Politehnica din Timişoara.
159. *Tarţa Tr.*, Inginer, Asistent Polit. Timişoara.
160. *Teodorescu C.*, Inginer-Şef Profesor la Politehnica din Bucureşti.
161. *Teodosiu A.*, Doctor în Matematici, Profesor onorar Timişoara.
162. *Tică M.*, Inginer, Asistent Politehnica Timişoara.
163. *Tino O.*, Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometrie Analitică la Polit. Timişoara.
164. *Trufin E.*, Inginer, Conferenţiar Polit. Timişoara.
165. *Turcu V.*, Profesor secundar, Asistent la Politehnica din Timişoara.
166. *Vălcovici V.*, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Strada Londra 44 Bucureşti.
167. *Viciu Aurel*, Profesor la Liceul Militar, Timişoara.
168. *Vişa Eugen*, Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Sf. Sava, Bucureşti.
169. *Vlad I. V.*, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara
170. *Vlădescu I.*, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
171. *Zăgănescu I.*, Inginer la C. F. R. şi Profesor la Politehnica Timişoara.
172. *Zaharia N. O.*, Profesor, Constanţa.
173. *Zapan Gr.*, Comandor-Aviat r, Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris) Şeful Serviciului Tehnic al Regiunii 3 Aeriene, Strada Pasteur 44, Bucureşti 6.
174. *Zgeban V*, Inginer, Conferenţiar Polit. Timişoara.
175. *Weber Matei*, Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Banaţia, Timişoara.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Birănaş Ioan (2208, 2261, 2271, 2282, 2285, 2287); *Boerescu P. G.* (P; 2237, 2261, 2289); *Chesaru Cristea* 2231, 2236, 2237, 2240, 2284, 2290, 2299, 2300, 2302, 2303, 2304); *Constantinescu Ilie* (P; 2062, 2063, 2094, 2096, 2135, 2143, 2150, 2151, 2159, 2271, 2230, 2278, 2281, 2282, 2284, 2285, 2289, 2291, 2296); *Costea Florian* (2243, 2245, 2250, 2256. 2257, 2264, 2265, 2276); *Filimon Ioan* (2300); *Frunză Radu* (2290); *Giurcaniu Mihail* (P; 1625, 1817, 1842, 1845, 1906, 1907, 1970, 2010, 2110, 2203, 2241. 2256, 2261, 2289, 2296, 2300); *Gligor Ioan* 1694, 2231, 2233, 2234, 2236, 2245, 2247, 2250, 2255, 2256, 2261, 2263, 2264, 2269, 2272, 2276, 2279, 2287, 2290, 2298, 2299); *Godea Ioan* (2257, 2263, 2264, 2284, 2288, 2296); *Gotthard Francisc* (2236, 2267, 2290, 2300); *Grumăzescu M.* (P); *Khinsky Ioan* (P; 2222, 2290, 2293, 2296); *London E.* (P; 2279, 2285, 2287, 2288, 2290, 2293, 2296); *Miclea Micolae* (2150, 2151, 2183, 2217, 2237, 2247, 2256, 2265, 2067, 2268, 2271, 2278, 2284, 2285, 2290, 2296, 2298, 2301, 2303); *Nedelcu Ulpius* (2243, 2244, 2252, 2284); *Neumann Maria* (P); *Roth Rudolf* (2290, 2299, 2300); *Rothenstein Bernhard* (1687, 1915, 2300); *Simcso Carol* (2284, 2285, 2287, 2290, 2299, 2300, 2303); *Tutor Aurel* (2144, 2166, 2168, 2195, 2199, 2272, 2276, 2277, 2279, 2284, 2285, 2288, 2289, 2296); *Ţigănoiu Alexandru* (A); *Vrânceanu Gh.* (2297, 2298, 2300); *Wegener Eugen* (1744).

ANUL XXV. APRILIE 1945 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNE SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** ECUATII ALGEBRICE CU RADACINI TRIGONOMETRICE DATE.
2. **EUGEN VISA:** O DEMONSTRATIE INTUITIVA A TEOREMEI LUI THALES.
3. NOTE MATEMATICE 3, 4.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 2144, 2151, 2231, 2245, 2253.
7. PROBLEME PROPUSE: 2313–2320.
8. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noăstre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

«R. M. T.» mulţumeşte D-lui Prof. *I. V. Măties*, membru în Comitet, pentru contribuţia benevolă de 5000 lei. Orice contribuţie de acest fel este binevenită în aceste timpuri când tiparul este foarte scump şi când Revista este ameninţată în existenţa ei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 1000 lei fiecare.

ANUL XXV — NO. 2. TIMISOARA, APRILIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

ECUAȚII ALGEBRICE CU RĂDĂCINI TRIGONOMETRICE DATE

DE

V. ALACI.

Ne propunem a construi unele ecuații algebrice, care să aibă rădăcini trigonometrice date.

În acest scop vom trata următoarele trei probleme:

1. *Să se construiască ecuația algebrică care să aibă rădăcinile*

$$(1)\qquad x = 2\sin^2\alpha\cos^4\frac{k\pi}{n} + 2\cos^2\alpha\sin^4\frac{k\pi}{n} + \cos 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n},$$

unde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *iar* α *este un parametru arbitrar.*

Soluție. Înlocuim întâi în (1) $\cos^2\frac{k\pi}{n}$, $\sin^2\frac{k\pi}{n}$ în funcție de cosinusul arcului dublu, avem

$$x = \frac{\sin^2\alpha}{2}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \frac{\cos^2\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \cos 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n},$$

sau

$$(2)\qquad x = \frac{1}{2} - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\frac{2k\pi}{n} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{2k\pi}{n} + \cos 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n}.$$

Cum $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, relația (2) simplificată, ne dă

$$(3)\qquad x = \frac{1+\cos^2\frac{2k\pi}{n}}{2}, \quad \text{de unde}$$

$$\cos^2\frac{2k\pi}{n} = 2x-1, \quad \text{deci,} \quad \sin^2\frac{2k\pi}{n} = 2(1-x).$$

Prin urmare, rezultă de aci

$$(4)\qquad \cos\frac{2k\pi}{n} = \sqrt{2x-1}, \quad \sin\frac{2k\pi}{n} = \sqrt{2(1-x)},$$

unde luăm numai semnul + inaintea radicalilor.

Din (4) deducem

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x-1)}, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ridicând ambii membrii la puterea n și ținând seamă de formula lui *Moivre*, găsim ecuația algebrică cerută, anume

$$(I)\qquad \boxed{\left[\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x-1)}\right]^n = 1.}$$

Observări. 1° Vedem că ecuația (I), este independentă de α, astfel luând în (1) $\alpha = 0°$, $45°$, $90°$, adică propunându-ne a construi ecuațiile algebrice cu rădăcinele respectiv,

$$x = 2\sin^4\frac{k\pi}{n} + \cos\frac{2k\pi}{n}, \quad x = \cos^4\frac{k\pi}{n} + \sin^4\frac{k\pi}{n}, \quad x = 2\cos^4\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{2k\pi}{n}$$

unde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, vom găsi în fiecare din aceste cazuri tot ecuația (I).

2° Odată ce am găsit relația

$$(5)\qquad \cos\frac{2k\pi}{n} = \sqrt{2x-1},$$

din (4), putem ajunge la ecuația (I) și pe altă cale.

În adevăr, folosind formula lui *Euler*

$$\cos\omega = \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

relația (5) devine

$$(6)\qquad t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{2x-1}, \quad \text{cu} \quad t = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Ecuația (6) se mai poate scri

$$t^2-2\sqrt{2x-1}\,t+1=0,$$

de unde

$$t=\sqrt{2x-1}\pm\sqrt{2(x-1)}.$$

Ridicând la puterea n și observând că

$$t^n=e^{2ik\pi}=1,$$

obținem luând semnul + la al 2-lea radical

$$[\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x-1)}]^n=1,$$

adică tot ecuația (I).

2. *Să se construiască ecuația algebrică care să aibă rădăcinele*

$$x=a\frac{\cos^4\frac{k\pi}{n}}{\cos\frac{2k\pi}{n}}, \tag{7}$$

unde $k=0,1,2,\ldots,n-1$, *iar* a *este un număr dat.*

Soluție. Relația (7) se mai poate scri evident

$$x=\frac{a\cos^4\frac{k\pi}{n}}{\left(\cos^2\frac{k\pi}{n}-\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)\left(\cos^2\frac{k\pi}{n}+\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)} \tag{8}$$

$$=\frac{a\cos^4\frac{k\pi}{n}}{\cos^4\frac{k\pi}{n}-\sin^4\frac{k\pi}{n}},$$

deci

$$x-a=\frac{a\sin^4\frac{k\pi}{n}}{\cos^4\frac{k\pi}{n}-\sin^4\frac{k\pi}{n}}. \tag{9}$$

Împărțind relația (9) prin (8), obținem

$$\frac{x-a}{x}=\operatorname{tg}^4\frac{k\pi}{n},\quad\text{sau}\quad\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}=\frac{\sin^2\frac{k\pi}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n}}.$$

În ultima relație, adunând la numitori pe numărători, avem

$$\sin^2\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}},\quad\cos^2\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}.$$

De aci deducem

$$\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}},\quad\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt[4]{x-a}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}}$$

și prin urmare

$$\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt[4]{x}+i\sqrt[4]{x-a}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}}.$$

Ridicând ambii membrii la puterea n și ținând seamă de formula lui *Moivre*, obținem observând că primul membru devine egal cu 1,

$$\boxed{\left(\sqrt[4]{x}+i\sqrt[4]{x-a}\right)^n-\left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}\right)^n=0}. \tag{II}$$

Aceasta este ecuația algebrică cerută.

3. *Se cere ecuația algebrică cu rădăcinele*

$$x=\frac{\sin^2\frac{3k\pi}{n}+2\sin^2\frac{2k\pi}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}, \tag{10}$$

unde $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Soluție. Relația (10), ținând seamă de formulele $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, devine

$$x=\frac{\left(3\sin\frac{k\pi}{n}-4\sin^3\frac{k\pi}{n}\right)^2+8\sin^2\frac{k\pi}{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}},$$

sau

$$x=\left(3-4\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)^2+8\cos^2\frac{k\pi}{n}=$$

$$\left(1-4\cos^2\frac{k\pi}{n}\right)^2+8\cos^2\frac{k\pi}{n},$$

deci

$$x=1+16\cos^4\frac{k\pi}{n}. \tag{11}$$

De aci deducem

$$\cos^2\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt{x-1}}{4},\quad\text{deci,}\quad\sin^2\frac{k\pi}{n}=\frac{4-\sqrt{x-1}}{4}$$

și prin urmare,

$$\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt[4]{x-1}}{2},\qquad\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt{4-\sqrt{x-1}}}{2}.$$

Înmulțind a 2-a relație cu $i\,(i=\sqrt{-1})$ și adunând-o la prima, obținem

$$\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{\sqrt{x-1}-4}}{2}.$$

Ridicând ambii membrii la puterea n-a, găsim

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\left(\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{\sqrt{x-1}-4}\right)^n=2^n},$$

tocmai ecuaţia algebrică cerută.

Observări. 1°. Ecuaţiile (I), (II) şi (III), au toate rădăcinile lor duble în cazul n par, iar în caz când n este impar ele au toate rădăcinile duble, exceptând una.

În adevăr, am văzut că ecuaţiile (I), (II), (III) au rădăcinele simplificate, date de (3), (7) şi (12), care pentru două valori din şirul $k=1, 2, \ldots, n-1$, anume k şi $n-k$ ne dau aceiaşi valoare pentru x, fiindcă

$$\cos\frac{2k\pi}{n}=-\cos\frac{(n-2k)\pi}{n},$$

$$\cos\frac{k\pi}{n}=-\cos\frac{(n-k)\pi}{n}.$$

Evident, când n este impar, rămâne o rădăcină simplă.

2°. Am mai tratat şi alte probleme analoage, în *Gazeta Matematică* [1], *Revista Matematică din Timişoara* [2], *Boletin Matematico* [3], în *Ştiinţă şi Progres* [4] şi în acest domeniu se pot face încă multe investigaţii.

Dacă ecuaţiile (I), (II) şi (III) s'ar putea uşor raţionaliza, relaţiile cunoscute între rădăcini şi coeficienţi ar permite apoi construirea unor clase de identităţi trigonometrice destul de interesante.

O DEMONSTRAŢIE INTUITIVĂ A TEOREMEI LUI THALES

DE

EUGEN VIŞA.

Voiu prezenta în cele de mai jos o demonstraţie simplă şi dintre cele mai intuitivă în acelaş timp a clasicei teoreme a lui *Thales* privitoare la proporţionalitatea segmentelor pe cari le determină o secantă paralelă cu una din laturile unui triunghiu pe celelalte laturi ale lui şi care demonstraţie nu-i exclus să fi fost cunoscută de altfel în antichitate şi încă să fi fost dată eventual pentru prima oară chiar de celebrul geometru grec de numele căruia se leagă această importantă teoremă.

Demonstraţia în chestiune se bazează pe consideraţii de arii de figuri echivalente în cazul particular când triunghiul este dreptunghic, iar secanta paralelă cu una din catete, precum şi pe reducerea la acest caz particular a tuturor celorlalte cari pot avea loc.

*

Fie deci, în această ordine de idei, triunghiul ABC, presupus dreptunghic mai întâi, cu unghiul drept, să zicem în B şi o secantă paralelă de exemplu cu cateta BC a lui (fig. 1).

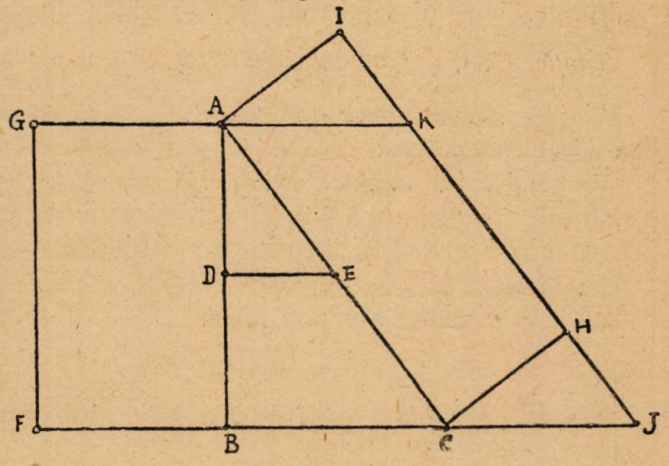


Fig. 1.

Fie încă D şi E punctele în cari această secantă taie respectiv cateta AB şi ipotenuza AC a triunghiului dreptunghic considerat.

Pe cateta AB şi ipotenuza AC, luate ca baze, construim, în exteriorul triunghiului ABC, dreptunghiurile ABFG şi ACHI, având respectiv ca înălţimi segmentele AE şi AD.

Prin ipoteză avem deci relaţiile:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} AG=BF=AE \\ AI=CH=AD, \end{cases}$$

aşa încât ariile celor două dreptunghiuri considerate vor avea respectiv expresiile:

---

[1]) *O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini funcţiuni trigonometrice*, vol. XVII, p. 401.

[2]) *O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice*, vol. VIII, p 131.

Asupra unor clase de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice, Vol. IX, p. 109.

O clasă de ecuaţiuni cu rădăcini reale, Vol. XI. p. 25.

[3]) *Una clase de ecuaciones algebraicas con raices trigonométricas*, An. IX, p. 1.

[4]) *O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice*, Anul III, p. 177.

$$(2)\quad \begin{cases} \text{aria}(ABFG) = \overline{AB} \cdot \overline{AE} \\ \text{aria}(ACHI) = \overline{AC} \cdot \overline{AD}. \end{cases}$$

Prelungind acum dreptele GA şi FBC dincolo de A şi C până taie latura HI a dreptunghiului ACHI, respectiv în punctele K şi J, obţinem triunghiurile dreptunphice egale AIK şi CHI, de unde urmează echivalenţa dreptunghiului ACHI cu paralelogramul ACJK, ceeace analitic se exprimă prin relaţia:

$$(3)\quad \text{aria}(ACHI) = \text{aria}(ACJK).$$

Pe de altă parte, comparând dreptunghiul ABFG cu acelaş paralelogram ACJK, observăm mai întâi că ele au aceeaşi înălţime, AB.

Să arătăm acum, în al doilea rând, că ele au şi aceeaşi bază, deci AG = AK sau că

$$(4)\quad AE = AK,$$

deorece, în virtutea primului şir de egalităţi din (!), AG = AE.

Or, egalitatea (4) rezultă din considerarea triunghiurilor dreptunghice AIK şi ADE, cari sunt evident egale, având catetele AI şi AD egale prin construcţie, iar unghiurile IAK şi EAD egale întrucât au unghiul KAE drept complement comun.

Urmează atunci că dreptunghiul ABFG este şi el echivalent cu paralelogramul ACJK, ceeace se exprimă la rândul său prin relaţia:

$$(5)\quad \text{aria}(ABFG) = \text{aria}(ACJK),$$

pe care apropiind-o apoi de relaţia (3), deducem în cele din urmă relaţia:

$$(6)\quad \text{aria}(ABFG) = \text{aria}(ACHI),$$

care exprimă, după cum se vede, echivalenţa dreptunghiurilor ABFG şi ACHI.

Cum însă, în virtutea expresiilor (2), aceasta din urmă relaţie se mai scrie şi sub forma:

$$(7)\quad \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \overline{AD},$$

în consecinţă deducem imediat proporţia:

$$(8)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}},$$

care, după cum se ştie, constitue tocmai una din expresiile analitice ale teoremei lui *Thales*.

*

Să considerăm acum cazul (fig. 2) când triunghiul ABC nu mai este dreptunghic nici în B, nici în C, fără eventual în A şi fie tot aşa o secantă paralelă cu latura BC a lui, care să taie laturile AB şi AC respectiv în punctele D şi E.

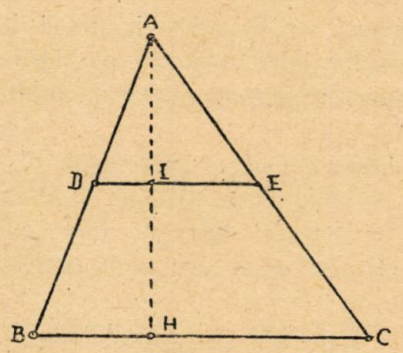


Fig. 2.

Ducând înălţimea AH, care taie paralela DE în punctul I, obţinem triunghiurile dreptunghice ABH şi ACH, cărora aplicându-le teorema lui *Thales*, conform celor stabilite mai sus, avem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AI}}, \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AI}}$$

şi de unde obţinem apoi imediat

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}},$$

care e tot relaţia (8) a lui *Thales*, de astă dată însă relativă la triunghiul oarecare ABC din cazul figurei 2.

NOTE MATEMATICE

3. — *Observări asupra numerelor prime.*

Sub acest titlu D-l Profesor *G. Călugăreanu* publică un interesant articol pentru generarea unor anumite numere prime.

În cele ce urmează vom indica şi noi o cale, stabilind următoarea proprietate:

„Cunoscând numerele prime mai mici ca N, *vom cunoaşte cu uşurinţă şi numerele prime cuprinse în intervalul de numere consecutive dela*

$$[2.3.5\ldots(\sqrt{N}) - N] \text{ la } [2.3.5\ldots(\sqrt{N})],$$

unde $(\sqrt{N})$ *înseamnă numărul prim imediat infe-*

rior lui $\sqrt{N}$, *iar produsul din paranteză cuprinde toate numerele prime până la* $(\sqrt{N})$ *inclusiv.*

În adevăr, într'o serie de alte lucrări am arătat că numărul numerelor prime, mai mici ca N (să nu se confunde cu indicatorul lui N), este dat de funcţia:

$$m = n + I_N[2.3.5\ldots(\sqrt{N})],$$

unde n este numărul factorilor primi ai lui N.

Fie acum: $p_1, p_2, \ldots, p_m$ aceste numere prime, atunci diferenţele:

$$[2.3.5\ldots(\sqrt{N}) - p_i],$$

unde $i = 1, 2, \ldots, m$ reprezintă, or numere prime, cuprinse în intervalul

$$[2.3.5\ldots(\sqrt{N}) - N] \text{ la } [2.3.5\ldots(\sqrt{N}),$$

or produse de numere prime mai mici ca N, cuprinse tot în acest interval.

Dacă eliminăm aceste produse, uşor de identificat, atunci ne rămân numerele prime căutate.

Alegând pe N după voinţă, putem suprapune intervalul dela

$$[2.3.5\ldots(\sqrt{N}) - N] \text{ la } [2\ 3.5\ldots(\sqrt{N})]$$

peste şiruri de numere care ne convin.

Este necesar să arătăm că pentru $N \geqq 49$, avem:

$$[2.3.5\ldots(\sqrt{N})] > N.$$

COMANDOR I. LINTES

---

4. — *Sur le quadrangle inscriptible.*

Si les côtés opposés (AB, CD) et (BC, DA) d'un quadrangle ABCD inscrit dans un cercle (O), de rayon R, se rencontrent en E, F et que ET, FT' soient les tangentes menées de ces points au cercle, on a [1]

$$(1)\quad \overline{EF}^2 = EA.EB + FC.FB = ED.EC + FD.FA = \overline{ET}^2 + \overline{FT}^2.$$

Soient M, N, P les milieux des diagonales AC, BD, EF qui déterminent la droite de *Newton* $\Delta \equiv (M, N, P)$ du quadrilatère complet ABCDEF. Les puissances respectives des points E, F, P, par rapport au cercle (O), sont

$$(E) = \overline{EO}^2 - R^2, \quad (F) = \overline{FO}^2 - R^2, \quad (P) = \overline{PO}^2 - R^2,$$

et

$$(E) + (F) = \overline{EO}^2 + \overline{FO}^2 - 2R^2 = 2\overline{PO}^2 + \frac{1}{2}\overline{EF}^2 - 2R^2,$$

de sorte que, en vertu de (1),

$$(2)\qquad (P) = \overline{PO}^2 - R^2 = \frac{1}{4}\overline{EF}^2.$$

Le point P est donc le centre radical du cercle (O) et des cercles-points E, F, ce qui prouve déjà que a droite EF est tangente en E, F à deux cercles passant l'un par E, l'autre par F et dont les axes radicaux avec (O) concourent en P. En outre, le cercle décrit sur EF comme diamètre est orthogonal au cercle (O). Donc, si l'on marque G sur AB, tel que EG = AB, H sur CD, tel que HE = CD, K sur DA, telque FK = DA, L sur BC, telque BL=CF, les cercles circonscrits aux triangles GEH et LKF sont tangents à EF en E et F, car les axes radicaux de ces cercles avec (O) sont les droites ST, UV joignant les milieux de (BE, EC), (AF, FB). Or, ces droites concourent au milieu P de EF.

N. B. Si la parallèle à Δ menée par C, par exemple, rencontre AB en Y, AF en Z, les cercles ECY et FCZ sont tangents à EF en E et F. En effet, les triangles ECY, FCZ sont homothétiques à GEH, FKL, transformés de MNQ, MNU par homothétie, Q, U étant les milieux de DA, CD.

V. THÉBAULT
TENNIE (SARTHE-FRANCE)

[1] *V. Thébault, Journal de Vuibert,* 28-e année, p. 10

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE ADMITERE IN POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA, Martie 1945.

GEOMETRIE.

I.

Să se expună metodele ce se pot întrebuinţa pentru a scrie ecuaţia tangentelor ce se pot duce dintr'un punct exterior unui cerc.

II.

Se consideră 2 axe perpendiculare Ox, Oy şi un cerc având centrul $C(0, \alpha)$ şi trecând prin origine.

Fie $A(a, 0)$ şi $B(b, 0)$, $(a, b > 0)$, două puncte depe axa Ox şi fie AI şi BJ tangentele ce se pot duce din aceste puncte la cercul definit mai sus. (I şi J sunt punctele de tangenţă). Aceste două drepte se taie în punctul T.

Presupunând că C variază pe Oy, se cere:

1. Să se demonstreze că AT+BT este constantă.

2. Să se deducă locul lui T şi să se arate că acest loc trece prin origine.

3. Dreapta I J trece printr'un punct fix.

4. Să se demonstreze proprietăţile 1 şi 3 geometric.

(Marţi 26 Martie, orele 8–11).

ALGEBRĂ.

I.

Să se determine constantele a, b, c astfel ca derivata funcţiei

$$y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{a + b \sin^2 x + c \cos^2 x}$$

să se anuleze pentru $x = 30^0$, $x = 45^0$ şi $x = 60^0$, ştiind că a, b, c satisfac şi ecuaţia

$$a^4 + b + c = 0.$$

II.

Să se determine A astfel ca expresia

$$E = \sqrt[3]{8x^4 + 1} - A x \sqrt[3]{x - 1}$$

să aibă o valoare finită şi diferită de zero pentru $x = \infty$ şi să se calculeze aceasta valoare.

III.

Să se determine a astfel ca ecuaţia

$$3x^4 - a x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

să admită două rădăcini egale şi de semne contrare. Punând în locul lui a valoarea găsită, să se rezolve ecuaţia dată.

(Marţi 27 Martie, orele 3—6).

TRIGONOMETRIE.

1. Un avion sboară în linie dreaptă la o altitudine constantă de 3500 m şi cu o viteză constantă de 600 Km pe oră. Un observator O, este situat într'un teren orizontal şi în acelaş plan vertical cu drumul avionului. Când avionul este în poziţia A, este văzut de observator sub unghiul $\alpha = 65^0$. Peste 10 secunde, când avionul a ajuns în poziţia B, este lovit de un proectil şi cade în linie dreaptă la pământ, făcând în cădere cu pământul, unghiul $\gamma = 72^0$.

Se cere:

— unghiul β sub care e văzut avionul în poziţia B.

— la ce distanţă de observator a căzut avionul?

(unghiurile se vor calcula în grade, minute, secunde, iar lungimile cu 2 zecimale).

2. Se dă ecuaţia: $2\cos 2x + (\alpha - 2)\sin x - (\alpha - 1) = 0$. Să se transforme într'o ecuaţie de gradul 2 în raport cu $\sin x$ şi să se calculeze cele două valori ale lui $\sin x$. Să se determine pentru ce valori ale parametrului α, ambele valori aflate pentru $\sin x$ sunt acceptabile. Să se calculeze în grade minute şi secunde valoriile lui x, în cazul $\alpha = \frac{11}{3}$.

3. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$\cos a + \cos 3a + \sin 2a.$$

(Mercuri 28 Martie, orele 8–11)

CHESTIUNI DE ORAL.

GEOMETRIE.

1°. Fie ABCD un trapez având baza mică $AB = a$ şi baza mare $CD = b$. Pe latura AC se ia un punct M astfel ca

$$\frac{MA}{MC} = \frac{m}{n}$$

şi prin M se duce paralela M N la cele două baze. Să se calculeze M N în funcţie de a, b, m, n.

2°. Se consideră într'un cerc un diametru I J. Tangentele în I şi J la cerc sunt intersectate de o a treia tangentă la cerc în A şi B. Figura A B I J rotită în jurul lui I J dă dă naştere unui trunchi de con. Se cere volumul acestui corp cunoscând raza cercului R şi lungimea $AB = a$.

3°. P fiind un punct oarecare depe cercul circumscris unui triunghi echilateral ABC, dreapta PC taie pe AB în N, iar PB pe AC în N. Să se arate că

$$BM \cdot CN = AB^2.$$

(Se poate da o soluţie geometrică sau analitică).

(Joi 28 Martie, orele 8—11).

ALGEBRĂ.

I.

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + x - y = 20 \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$$

II.

Să se calculeze derivatele funcţiilor

$$y = \operatorname{arc\,sin} \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \qquad z = \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Să se elimine apoi direct x între funcţiile date stabilind relaţia

$$y - 2z = 2k\pi \qquad (k, \text{ întreg}).$$

III.

Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 6}}.$$

(Joi 29 Martie, orele 3—6).

TRIGONOMETRIE.

I. Să se calculeze

$$\sin 840^0, \cos 840^0, \operatorname{tg} 840^0, \operatorname{cotg} 840^0.$$

II. Se dă:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}.$$

Să se calculeze $\sin(\alpha + \beta)$.

III. Într'un triunghiu dreptunghiu cunoaştem ipotenuza a şi suma catetelor $b + c = m$. Să se arate cum putem calcula unghiurile ascuţite ale triunghiului.

IV. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - 2\sin x = 0.$$

V. Să se rezolve sistemul:

$$x-y=120^0, \quad \sin x-\sin y=\frac{3}{2}.$$

VI. Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu avem relaţia

$$\sin C=\cos A+\cos B$$

triunghiul este dreptunghiu.

(Vineri 30 Martie, orele 8—11).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*. Anul L, No. 7, Martie 1945. O donaţie. Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei omogene de gradul al 2-lea, de *N. Georgescu Roegen*. Asupra triunghiurilor triologice şi tetraedrelor tetraomogene de *C. Ionescu-Bujor*. Raportul comisiunii pentru Premiul de Aritmetică, de G-l *Gh. Buiciiu*, Ing. *I. Ionescu* şi Prof. *P. Sergescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse

2. *Ştiinţă şi Progres*, Anul X, No. 1—2, Noemvrie—Decemvrie 1944. *Lazare Carnot*, de *Caius Iacob*. Asupra triunghiului antipodar de *Cezar Coşniţă* Omografie potenţială, de Prof. *C. Ionescu-Bujor*. Mănăstiri din nordul Moldovei, de Prof. *G. Janet*. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *E. Arghiriade*. Sur le contact d'une surface et d'une quadrique. (Académie Roumaine, Bulletin de la Section Scientifique, T. XXVII, No 3).

4. *E. Arghiriade*. Sur la ligne flecnodale d'une surface non réglée. (Extrait du Bulletin Mathématique de la Soc. Roumaine des Sciences, T. 45, 1943).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2144. — *Pe ipotenuza unui triunghiu dreptunghic* A B C, *în care* A B = B C = 1, *se iau pe rând punctele* D, E, F *astfel ca* $\sphericalangle$B A D = $\sphericalangle$E A F *şi se notează* B D = x, B E = y, B F = z. *Se cere să se stabilească relaţia:*

$$z=\frac{x+y-xy\sqrt{2}}{1-xy}.$$

V. ALACI

1. *Soluţie geometrică dată de d-nul profesor Em. Arghiriade.*

În triunghiul B A F aplicăm teorema dreptelor izogonale, anume:

Două drepte izogonale A D, A E determină pe latura opusă segmente astfel că produsele C D . C E şi D F . E F sunt în raportul patratelor $\overline{AC}^2$, $\overline{AF}^2$ a laturilor adiacente

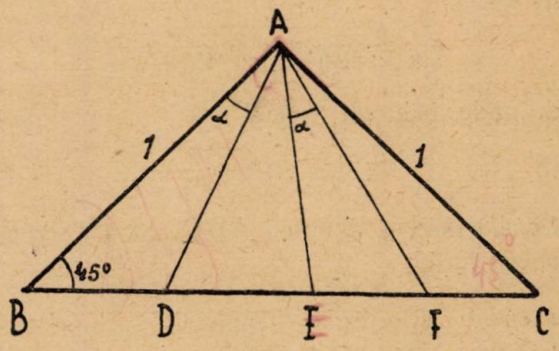
Astfel avem

$$\frac{CD.CE}{DF.EF}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AF}^2}. \tag{1}$$

(Exercices de Géométrie, par „F. G. M", p. 1156, éd. 5).

Cum C D = x, C E = y, D F = $z-x$, E F = $z-y$, A B = 1, relaţia (1) devine

$$\frac{xy}{(z-x)(z-y)}=\frac{1}{\overline{AF}^2}. \tag{2}$$



Dar, aplicând în triunghiul A B F teorema lui *Pitagora* generalizată, adică,

$$\overline{AF}^2=\overline{AB}^2+\overline{BF}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BF}\cos 45^0=1+z^2-z\sqrt{2},$$

relaţia (2) devine

$$\frac{xy}{(z-x)(z-y)}=\frac{1}{1+z^2-z\sqrt{2}},$$

sau

$$xy(1+z^2-z\sqrt{2})=z^2-(x+y)z+xy.$$

Simplificând, avem

$$xyz(z-\sqrt{2})=z(z-x-y)$$

sau

$$xy(z-\sqrt{2})=z-x-y.$$

De aci deducem

$$z=\frac{x+y-xy\sqrt{2}}{1-xy},$$

tocmai relaţia cerută.

Observare. Triunghiul A B C poate fi oarecare, dar să aibă A B = 1 şi $\sphericalangle$A B C = 45°, celelalte date din enunţ păstrându-se.

2. *Soluţie trigonometrică.* Notăm

$$\sphericalangle BAD=EAF=\alpha, \quad \sphericalangle DAE=\beta,$$

celelalte notaţii fiind cele din enunţ.

În triunghiul A B D, teorema sinusurilor ne dă

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin(45+\alpha)}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha+\cos\alpha},$$

de unde

$$x = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha},$$

şi deci

(1) $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{2}-x}.$$

În triunghiul A B E, aceiaşi teoremă a sinusurilor ne dă

$$\frac{y}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\sin(45^0+\alpha+\beta)},$$

de unde deducem ca mai sus

(2) $$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{y}{\sqrt{2}-y}.$$

Considerând şi triunghiul A B F, teorema sinusurilor ne dă încă

$$\frac{z}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{1}{\sin(45^0+2\alpha+\beta)},$$

de unde deducem ca mai sus

(3) $$\mathrm{tg}\,(2\alpha+\beta) = \frac{z}{\sqrt{2}-z}.$$

Pe de altă parte cunoaştem desvoltarea

$$\mathrm{tg}\,(2\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)},$$

care în virtutea relaţiilor (1), (2) şi (3) devine

$$\frac{z}{\sqrt{2}-z} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{2}-x}+\dfrac{y}{\sqrt{2}-y}}{1-\dfrac{xy}{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}-y)}} = \frac{(x+y)\sqrt{2}-2xy}{2-\sqrt{2}(x+y)}.$$

Aplicând o proprietate a proporţiilor, mai putem scri

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{(x+y)\sqrt{2}-2xy}{2-2xy} = \frac{\sqrt{2}(x+y-xy\sqrt{2})}{2(1-xy)}.$$

De aci deducem

$$z = \frac{x+y-xy\sqrt{2}}{1-xy},$$

tocmai relaţia cerută.

Au soluţionat problema în acest fel, d-nii: *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Knoph Hermann* (Timişoara), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Pălăceanu Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

3. *Soluţie prin trigonometria patratică dată de d-nii: Chiriac C-tin* (Lt.) *şi Maliţa Mircea* (Lic. Beiuş).

Avem $\sphericalangle B = 45^0$, apoi notăm $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle DAF = \beta = \sphericalangle BAE$.

În triunghiurile semidreptunghice B A D, B A E, B A F (căci $B = 45^0$), o teoremă din trigonometria patratică[1] (p. 47) ne permite a scri, ţinând seamă de notaţiile din enunţ

(1) $$x = \sqrt{2}\,sp\,\alpha,\quad y = \sqrt{2}\,sp\,\beta,\quad z = \sqrt{2}\,sp\,(\alpha+\beta).$$

Cum, în cazul nostru

$$sp\,(\alpha+\beta) = \frac{sp\,\alpha+sp\,\beta+2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta},$$

(trig. patratică p. 17), sau

$$\sqrt{2}sp\,(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}sp\,\alpha+\sqrt{2}sp\,\beta-(\sqrt{2}sp\,\alpha)(\sqrt{2}sp\,\beta)\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}\,sp\,\alpha)(\sqrt{2}\,sp\,\beta)},$$

această relaţie, în virtutea egalităţilor (1) devine

$$z = \frac{x+y-xy\sqrt{2}}{1-xy},$$

relaţia cerută

Problema 2151. — *Fie* A, B, C *trei puncte pe o dreaptă astfel ca* $\overline{AB} = \overline{BC}$. *Prin* B *se duce o dreaptă variabilă* (D_1), *iar prin* C *perpendiculara* (D_2) *la* (D_1). *Fie* δ_1, δ_2 *respectiv distanţele punctului* A *la dreptele* (D_1) *şi* (D_2). *Se cere locul geometric al punctului P având coordonatele:* $x=\delta_1$, $y=\delta_2$.

EUGEN WEGENER

Soluţie dată de d-nul Cherdivarencu I. (Polit. Timişoara). Alegem ca axe rectangulare A C şi perpendiculara pe ea în A, costruim figura şi fie $AB = BC = a$.

Cum A E şi dreapta (D_2) sunt perpendiculare pe (D_1), rezultă că triunghiurile E A B şi D B C sunt dreptunghice în E şi D şi având ipotenuzele egale $AB = BC = a$) şi unghiurile din B egale ca opuse la vârf, rezultă egalitatea acestor triunghiuri şi deci

$$EB = BD = \frac{\delta_2}{2},$$

fiindcă $ED = AF = \delta_2$ ca paralele cuprinse între paralele.

Considerând acum triunghiul dreptunghic E A B, avem

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2,\quad \text{sau}\quad (1)\quad a^2 = \delta_1^2 + \frac{\delta_2}{4}.$$

---

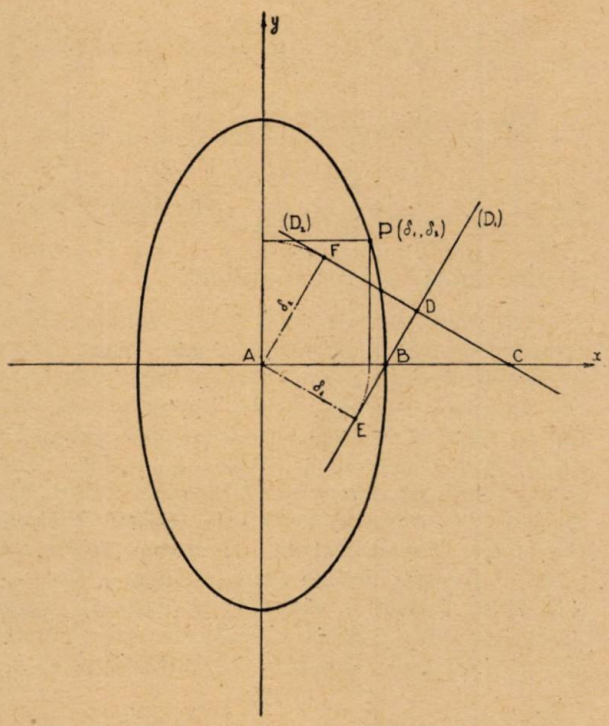
[1] *Intr'un triunghiu semidreptunghic* B A C, *între laturile b şi c ale unghiului de* 45^0, *există relaţia,*

$b = c\sqrt{2}\,sp\,B$, ($B < 90^0$, cazul nostru).

Cum $\delta_1 = x$, $\delta_2 = y$ sunt coordonatele lui P, relaţia (1) împărţită cu a^2 devine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$

Locul lui P este astfel o elipsă cu semiaxele a şi $2a$.



Soluţie analitică. Alegem ca axe rectangulare AC şi perpendiculara în B. Fie $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, atunci coordonatele punctelor A, B, C sunt

$$A(-a, 0),\ B(0, 0),\ C(a, 0).$$

Ecuaţia dreptei (D_1) este $y - \lambda x = 0$ (λ variabil).

Ecuaţia dreptei (D_2) este $y = -\frac{1}{\lambda}(x - a)$, sau $x + \lambda y - a = 0$.

Depărtările δ_1, δ_2 ale punctului $A(-a, 0)$ respectiv faţă de dreptele (D_1) şi (D_2) sunt

$$\delta_1 = \frac{a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = x, \quad \delta_2 = \frac{-2a}{-\sqrt{1+\lambda^2}} = y.$$

Coordonatele lui P sunt

$$(1) \qquad x = \frac{a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad y = \frac{2a}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Să eliminăm pe λ. Împărţind relaţiile (1), deducem $\lambda = \frac{2x}{y}$, valoare care introdusă în prima relaţie din (1), ne dă simplificând cu x şi ridicând apoi la patrat

$$1 = \frac{4a^2}{y^2 + 4x^2}$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$

Locul geometric al punctului P este o elipsă cu centrul în B şi semiaxele a şi $2a$.

Soluţii analoage date de d-rele *Măran Ana* (Polit., Timişoara), *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit, Timişoara), *Bolcaş V.*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Gligor Ioan* (student, Timişoara), *Ionescu C. Victor*, *Marinescu N.*, *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Rădulescu Nicolae*, *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Şipoş Eugen* (Polit, Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petru* (Polit, Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga Timişoara) şi *Ţigănoiu Alexandru* (Polit. Timişoara).

Observare. Fiindcă în enunţ nu s'a precizat faţă de care axe trebuesc luate coordonalele punctului P, am găsit în prima soluţie, că locul lui P este o elipsă cu centrul în A, iar în 2-a soluţie am găsit o elipsă de aceleaşi semiaxe, dar cu centrul în B.

Problema 2231. — *Într'un triunghiu dreptunghic* ABC *se duce înălţimea* AA′. *Fie* A′D *şi* A′E *bisectoarele unghiurilor drepte* AA′B *şi* AA′C *limitate la laturile triunghiului considerat.*

Însemnâmd cu α *şi* β *respectiv unghiurile* ADA′ *şi* AEA′, *să se stabilească relaţia*

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{b^2 - c^2}{2bc}$$

LT. MIRCEA GRUMAZESCU

Soluţie. Construind figura, observăm că unghiurile α şi β sunt unghiuri exterioare respectiv în triunghiurile BA′D şi CA′E, care au unghiurile din A′ de 45°, deci putem scri

$$\alpha = 45^\circ + B, \quad \beta = 45^\circ + C,$$

şi relaţia cerută în enunţ se mai poate scri

$$(1) \qquad \operatorname{tg}(B - C) = \frac{b^2 - c^2}{2bc}.$$

Să se stabilească această relaţie, având în vedere că în triunghiul dreptunghic ABC, avem

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}.$$

Pentru aceasta observăm că putem scri succesiv

$$\operatorname{tg}(B-C) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C}{1+\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} = \frac{\frac{b}{c} - \frac{c}{b}}{1+1} = \frac{b^2-c^2}{2bc}.$$

Avem astfel stabilită relaţia (1), deci cea cerută.

Soluţii bune date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu Ioan* (Caracal), *Birănas Ioan* (Arad), *Bogza Mihai* (Lic., Deva), *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic., Brăila), *Enache Ion* (Lt.), *Gligor* (student, Timişoara), *Grigore Gheorge*, *Kluger Ivan*, *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Schauer Alexandru* (Polit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit. Timişoara), *Stanciu Petre* (Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic., Loga Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic., Făgăraş) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Soluţie prin trigonometria patratică, dată de d-nii Anton Ioan (Polit., Timişoara) şi Chesaru Cristea (Polit., Timişoara).

În triunghiul dreptunghic A B C (B > C), în virtutea teoremei IV din „*Trigonometria patratică*", p. 44, avem stabilite relaţiile

$$b - c = 2b\, sp(45^0 - C), \quad b + c = 2b\, cp(45^0 - C)$$

care prin înmulţire şi având în vedere relaţiile 13) „Trig. patratică", ne dau

$$b^2 - c^2 = 4b^2 sp(45^0 - C) cp(45^0 - C) = 4b^2 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 C}{4}.$$

De aci deducem succesiv

$$\frac{b^2-c^2}{2bc} = \frac{b}{c} \cdot \frac{1-\operatorname{tg}^2 C}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 C}{2 \operatorname{tg} C} = \operatorname{cotg} 2C =$$

$$\operatorname{cotg}(C+C) = \operatorname{cotg}[90^0 - (B-C)] = \operatorname{tg}(B-C).$$

Avem astfel stabilită relaţia (1) din prima soluţie, sau relaţia din enunţ

Problema 2245. — *Să se arate că*

$$\sum_{p=1}^{n} p\,(C_{p+2}^1 + C_{p+4}^2) = \frac{n(n+1)(n^2+13n+38)}{8}.$$

MARIA NEUMANN

Soluţie. Având în vedere relaţiile

$$\sum_1^n p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \sum_1^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_1^n p = \frac{n(n+1)}{2},$$

(Hütte, p. 69), putem scri succesiv

$$\sum_1^n p(C_{p+2}^1 + C_{p+4}^2) = \sum_1^n \left[p(p+2) + \frac{p(p+4)(p+3)}{2} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \sum_1^n (p^3 + 9p^2 + 16p) = \frac{1}{2} \left(\sum_1^n p^3 + 9 \sum_1^n p^2 + 16 \sum_1^n p \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 9 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 16 \frac{n(n+1)}{2} \right] =$$

$$\frac{n(n+1)}{4} \left[\frac{n(n+1)}{2} + 3(2n+1) + 16 \right] =$$

$$\frac{n(n+1)}{8}(n^2+n+12n+6+32) = \frac{n(n+1)(n^2+13n+38)}{8}.$$

Relaţia cerută este astfel stabilită.

Soluţii bune date de d-nii: *Barbu Ion* (Lic., Caracal), *Birănas Ioan* (Arad), *Bogza Mihai* (Lic., Deva), *Cristache Avram* (Lic., Brăila), *Cochela Livius* (Lic. Militar, Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic., Brăila), *Costea F.* (Lic., Beiuş), *Gheţea Traian* (Lic., Făgăraş), *Gligor Ioan* (student Timişoara), *Kinsky Ioan* (Polit., Timişoara), *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Mazilu M.* (Făgăraş), *Popescu Barbu* (Lic., Militar, Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor Aurel* (Făgăraş). *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara), *Vrânceanu Gheorghe* (Lic., Militar. Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2253. — *Să se calculeze minimul sumei*

$$S = x + 3xy + 5xyz,$$

ştiind că

$$x^3 y^5 z^7 = a \quad (a = \text{constant}).$$

AL. TIGANOIU

Soluţie. Folosim următoarea teoremă [1])

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt nişte cătimi pozitive variabile, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $l_1, l_2, \ldots, l_n$; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sunt nişte numere algebrice pozitive, unele putând fi şi nule şi dacă produsul $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} = \text{ct} = a$, atunci suma

$$S = A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} + A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} + \cdots + A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$$

este minimă când avem

---

[1]) *V. Alaci. Aflarea directă a maximului unui produs şi a minimului unei sume*, articol publicat în „R. M. T", An. IV, No 6,

$$\frac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ m_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix}} = \frac{A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & m_2 & \dots & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & m_n & \dots & l_n \end{vmatrix}} = \dots$$

$$= \frac{A_u x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & m_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & m_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & m_n \end{vmatrix}}.$$

Valoarea minimului este dată de

$$(1) \qquad \min S = (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) \times \sqrt[\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_n]{a^{\Delta} \cdot \left(\frac{A_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \cdot \left(\frac{A_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{A_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n}},$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

iar $\Delta_i (i = 1\ 2, \dots, n)$ *se obține din* Δ, *înlocuind elementele coloanei de rangul i respectiv prin* $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Cum în cazul nostru,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 7 - 7 - 5 = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\text{și } \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 3,$$

rezultă că minimul lui S, conform relației (1) este

$$\min S = 3\sqrt[3]{a\left(\frac{1}{-2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{-2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{7}}$$

$$= 3\sqrt[3]{\left(a \cdot 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{7}\right)} = 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{2} \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 7} a},$$

deci

$$\min S = \frac{150}{49} \sqrt[3]{\frac{10\,a}{63}}.$$

Soluții bune date de d-nii: *Birănaș Ioan* (Arad), *Brașoveanu Gheorghe* (Craiova), *Constantinescu Ilie* (Lic., Brăila), *London Emeric* (Polit., Timișoara), *Miclea Nicolae* Polit,, Timișoara), *Stanciu Petre* (Polit, Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara) și *Tutor Aurel* (Făgăraș).

Altă soluție dată de d-l Stanciu Petre (Polit., Timișoara).

Folosim metoda multiplicatorilor. Pentru aceasta, anulăm derivatele parțiale în raport cu x, y, z ale expresiei

$$E = x + 3xy + 5xyz + \lambda(x^2 y^5 z^7 - a),$$

la care alăturăm relația de condiție, avem

$$\begin{cases} 1 + 3y + 5yz + 3\lambda x^2 y^5 z^7 = 0 \\ 3x + 5xz + 5\lambda x^3 y^4 z^7 = 0 \\ 5xy + 7\lambda x^3 y^5 z^6 = 0 \\ x^3 y^5 z^7 = a. \end{cases}$$

Avem de rezolvat acest sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute x, y, z, λ.

Pentru aceasta folosim următorul artificiu. Multiplicăm primele trei relații respectiv cu x, y, z și apoi ținem seamă de ultima ecuație, avem

$$\begin{cases} x + 3xy + 5xyz = 0 \\ 3xy + 5xyz + 5a\lambda = 0 \\ 5xyz + 7a\lambda = 0 \\ x^2 y^5 z^7 = a. \end{cases}$$

Scăzând ecuația 2-a din prima, apoi a 3-a din a 2-a, avem

$$(1) \qquad \begin{cases} x = 2a\lambda \\ 3xy = 2a\lambda \\ 5xyz = -7a\lambda \\ x^3 y^5 z^7 = a. \end{cases}$$

Înlocuind valorile lui x, $3xy$ și $5xyz$ din (1), în expresia lui S din enunț, avem

$$(2) \qquad S = -3a\lambda,$$

unde λ trebuie calculat. Pentru aceasta observăm că împărțind relația 2-a din (1) prima, obținem

$$y = \frac{1}{3},$$

apoi împărțind relația 3-a din (1) prin a 2-a, găsim

$$z = -\frac{21}{10},$$

astfel că avem

$$\begin{cases} x = 2a\lambda \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{21}{10}. \end{cases}$$

Înlocuind aceste valori în ultima relaţie din (1), găsim

$$8a^3\lambda^3 \cdot \frac{1}{3^5} \cdot \left(-\frac{21}{10}\right)^7 = a,$$

de unde

$$-2a\lambda = \sqrt[3]{3^5 \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^7 a} = 3\left(\frac{10}{21}\right)^2 \sqrt[3]{9 \cdot \frac{10}{21} a}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^2 3\sqrt[3]{\frac{10}{63} a},$$

şi deci

$$-3a\lambda = \frac{150}{49} \sqrt[3]{\frac{10}{63} a}.$$

Această valoare înlocuită în (2) ne dă

$$S = \frac{150}{49} \sqrt[3]{\frac{10a}{63}},$$

acelaşi rezultat ca în prima soluţie.

PROBLEME PROPUSE

2313. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, ştiind că a treia parte din rădăcina sa patrată se scrie la fel ca şi suma cifrelor sale efectuată în baza şase. GAVRIL CRETA

2314. — Două staţiuni A şi B, depărtate cu 9 km, sunt legate printr'o linie dublă de tranvaiu. Din A şi din B pleacă deodată, din 6 în 6 minute, câte un tramvaiu. În fiecare staţiune, simultan cu plecarea unui tranvaiu, are loc sosirea altuia. Tranvaiele parcurg distanţa AB cu o viteză uniformă şi fără opriri. Un călător pleacă pe jos din A deodată cu un tranvaiu şi soseşte în B deodată cu alt tranvaiu. El a fost depăşit de 16 tranvaie şi a întâlnit 26 de tranvaie care veneau spre A ; în ambele cazuri s'au considerat şi cele două tranvaie de la capete.

Se cer vitezele tranvaielor şi a călătorului.

EMIL POP

2315. — Fie polinomul

$$f(x, y, z) = a_1 x^3 + a_2 y^3 + a_3 z^3 + a_4 x^2 y + a_5 x y^2 + a_6 y^2 z + a_7 y z^2 + a_8 x^2 z + a_9 x z^2 + x y z.$$

Să se arate că dacă fiecare dintre expresiile $f(1, 1, 1)$, $f(1, 0, 1)$, $f(0, 1, 1)$, $f(1, 1, 0)$, $f(a, 0, c)$, $f(0, b, c)$, $f(a, b, 0)$, $f(q, -p, 0)$, $f(0, -r, q)$ se anulează, atunci

$$f(-r, 0, p) = 0.$$

Să se arate, că în acest caz, condiţia ca polinomul $f(x, y, z)$ să se împărtă exact cu $xp + yq + zr$, este dată de una dintre relaţiile

$$p + q + r = 0, \quad ab + bc + ca = 0.$$

MARIA NEUMANN

2316. — Un cerc O are centrul mobil pe dreapta AO şi este tangent în M unei drepte fixe AM. Se cere locul intersecţiei cercului O cu paralela din M la AO. G-L GH. BUICLIU

2317 — În triunghiul ABC se duce o dreaptă oarecare din vârful A. Fie I un punct pe dreaptă. Paralela la BC dusă prin I taie pe AB şi AC respectiv în punctele D şi E. Fie M intersecţia celor două tangente în punctele D şi E la cercurile circumscrise triunghiurilor ADI şi AEI. Să se arate că, independent de poziţia punctului I, avem

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} = \overline{DM} \cdot \overline{AC} + \overline{EM} \cdot \overline{AB},$$

$$\frac{\overline{DM} \cdot \overline{DI}}{\overline{EM} \cdot \overline{EI}} = \text{ct.}$$

CPT. M GRUMAZESCU

2318. — Să se stabilească identităţile

$$\sum_{k=0}^{3} \operatorname{cotg}\left[\alpha + \frac{(1-2k)\pi}{8}\right] = -4 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\prod_{k=0}^{3}\left[\alpha + \frac{(1-2k)\pi}{8}\right] = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{3} \operatorname{cotg}^2\left[\alpha + \frac{(1-2k)\pi}{8}\right] = 4(3 + 4 \operatorname{tg}^2 4\alpha).$$

V. ALACI

2319. — Să se rezolve un triunghiu având cunoscute un unghiu, perimetrul şi suprafaţa. Discuţie.

I. LOZICIU

2320. — Să se demonstreze că într'un triunghiu semidreptunghic ($A = 45^\circ$), avem relaţiile

$$\frac{h_b}{h_c} = \frac{(2p-c)\, sp\, \frac{C}{2}}{(2p-b)\, sp\, \frac{B}{2}}, \qquad h_b h_c = \frac{2\, s\, sp\, B\, sp\, C}{\sin A},$$

notaţiile fiind cele obicinuite. CRISTEA CHESARU

Erată. În problema 2311. se va înlocui $\frac{r}{3p}$ prin $\frac{r}{p}$.

POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA

TABLOU

de candidaţii reuşiţi la examenul de admitere din Martie 1945.

1. **Drăghici M. Ion,** Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti.
2. **Romaşcanu Filip,** Lic. Teoretic evreesc, Piatra Neamţ.
3. **Roth Ionel,** Lic. Israelit, Timişoara.
4. **Biro Paul,** Lic. de Stat Debreţin.
5. **Georgescu Hristu,** Lic. Dr. I. Meşota, Braşov.
6. **Bocancea Octatvian,** Lic. Hurmuzachi, Rădăuţi.
7. **Schinfeld Artur,** Lic. Cultura, Bucureşti.
8. **Bernthal Leo,** Lic. Evreesc, Roman.
9. **Röhrlich Alfred,** Lic. Israelit, Timişoara.
10. **Kovacs Ladislau,** Lic. Rimano-Catolic, Arad.
11. **Senberg M. Saul,** Lic. Conf. Israelit, Timişoara.
12. **Semlyen Adam,** Lic. Reformat, Cluj.
13. **Popescu D. Constantin,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
14. **Röhrlich Armand,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
15. **Gallin Nicolae,** Lic. Gh. Lazăr, Bucureşti.
16. **Herşcop Artur,** Lic. Israelit, Timişoara.
17. **Kogut Gheza,** Lic. Israelit, Timişoara.
18. **Ruginâ Ioan,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
19. **Török Petru,** Lic. Moise Nicoară, Arad.
20. **Andor Dumitru,** Lic. Moise Niciară, Arad.
21. **Ghindaşiu Ioan,** Lic. Andrei Mureşanu, Dej.
22. **Scurtu Petru,** Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
23. **Gârlaşiu Ştefan,** Colegiul Naţ. Carol I., Craiova.
24. **Pigulea Vasile,** Lic. Traian, Turnu Severin.
25. **Maulescu Mihai,** Colegiu Carol I., Craiova.
26. **Ciorogariu Nicolae,** Lic. Decebal, Deva.
27. **Massarik Frederic,** Lic. Ttraian Doda, Caransebeş.
28. **Dumitrescu M. Gheorghe,** Lic. I. C. Brăteanu, Piteşti.
29. **Popa Iuliu,** Lic. Decebal, Deva.
30. **Urse Ştefan,** Lic. Bălcescu, Brăila.
31. **Brădeanu Virgil,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
32. **Seitan Dumitru,** Lic. Dr. I. Meşota, Braşov.
33. **Sarkadi Toma,** Lic. Cultura, Bucureşti.
34. **Spinka Adalbert,** Lic. Lenau, Timişoara.
35. **Sintie Pompiliu,** Lic. Gh. Bariţiu, Cluj.
36. **Zosin M. Ioan,** Lic. Industrial, Iaşi.
37. **Cicirean Gh. Gheorghe,** Lic. Indust., A. Vlaicu, Arad.
38. **Ivan Gh. Gheorghe,** Lic. Radu Negru, Făgăraş.
39. **Colgiu I. Ionel,** Lic. Bălcescu, Braşov.
40. **Russu I. Gheorghe,** Lic. Moise Nicoară, Arad.
41. **Nossa Vasile,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
42. **Österling Ioan,** Lic. Piarist, Timişoara.
43. **Ardeleanu Dumitru,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
44. **Davidescu C. Valeria,** Lic. Iulia Haşdeu, Câmpina.
45. **Florescu Gheorghe,** Lic. de băeţi, Petroşani.
46. **Marincovici Alexandru,** Lic. Nic. Bălcescu, Brăila.
47. **Suta Coriolan,** Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
48. **Terfăloagă Nicolae,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
49. **Bugariu Gheorghe,** Lic. Piarist, Timişoara.
50. **Mireanu Mircea,** Lic. de băeţi, Cernăuţi.
51. **Rusu Teodor Ioan,** Lic. Sf. Vasile cel Mare, Blaj.
52. **Herşcovici Oscar,** Lic. Gh. Bariţiu, Cluj.
53. **Gruner Iosif,** Lic. Industr. de Constr., Timişoara.
54. **Klauber Clara,** Lic. Carmen Sylva, Timişoara.
55. **Lövinger Ştefan,** Lic. Teoretic Evreesc, Arad.
56. **Sântion Vasile,** Lic. Decebal, Deva.
57. **Altman Andrei,** Lic. Israelit, Timişoara.
58. **Fântână Nicolae,** Lic. Radu Negru, Făgăraş.
59. **Groza Ioan,** Lic. Decebal, Deva.
60. **Medeanu A. Ghenadie,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
61. **Popescu C. Ştefan,** Lic. Tidor Vladimirescu, T.-Jiu.
62. **Ranca A. Ioan,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
63. **Boboş I. Ioan,** Lic. Octavian Goga, Găeşti.
64. **Dobriţescu C. Vasile,** Lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
65. **Aslan Alexandru,** Lic. Teoretic, Tulcea.
66. **Dejan Traian,** Lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
67. **Ursachi I. Octavian,** Lic. Eud. Hurmuzachi, Rădăuţi.
68. **Hogmann Iosif,** Lic. de băeţi, Petroşani.
69. **Picoş F. Silviu,** Lic. Titu Maiorescu, Aiud.
70. **Solea Romul,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
71. **Uzuru D. Elena,** Lic. Teoretic, Turnu-Severin.
72. **Kun Petre,** Lic. Industrial, Timişoara.
73. **Vasiu T. Lucian,** Lic. Decebal, Deva.
74. **Hirsch Egon,** Lic. Israelit, Oradea.
75. **Hossu Sextil,** Lic. Piarist, Timişoara.
76. **Gruescu N. Corneliu,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
77. **Ibănescu I. Corneliu,** Lic. Gh. Cadreanu, Bârlad.
78. **Mircea Oprea Nicolae,** Lic. E. Hurmuzachi, Cernăuţi.
79. **Cepeu Pavel,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
80. **Diaconescu I. Valeriu Grechi,** Lic. Tudor Vladimirescu, Tg.-Jiu.
81. **Luchici Iosif,** Lic. German, Timişoara.
82. **Pandele Gheorghe,** Lic. I. C. Brăteanu, Piteşti.
83. **Vlad Felix,** Lic. Piarist, Sighetul Marmaţiei.
84. **Mircea A. Gheorghe,** Lic. Industrial, Bucureşti.
85. **Dumitrescu B. Alexandru,** Lic. Sf. Gheorghe, Bucureşti.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Barbu Ioan (*P*; 2211, 2262, 2271, 2293, 2298, 2299, 2301, 2302, 2312) *Barusco Gh.* (2299); *Bogza Mihai* (1694, 2039, 2256, 2279, 2290, 2296, 2299, 2300); *Borş C.* (P); *Brasch Andrei* (2269, 2299, 2300, 2305, 2310 2311, 2312); *Brasoveanu Gh.* (2298, 2300); *Chesaru Cristea* (P.; 1849, 1921, 2276, 2279, 2285, 2288, 2305, 2310); *Creţa Gavril*, (P; 2257, 2290, 2298); *Enăchescu Ion* (P); *Gothard Francisc* (2250, 2252, 2276, 2282, 2310); *Huzău Ion* (2300); *Kinsky Ion* (P; 2308); *Mătieş V. I.* (P); *Miliutin Adrian* (2244, 2271, 2312); *Nedelcu Ulprius* (2300); *Neumann Maria* (2306); *Plângu Ion* (2250, 2276, 2300); *Pop Emil* (2276 2296, 2299); *Popescu Barbu* (2244, 2252, 2289, 2290, 2300); *Stan Aurelian* (P); *Tripşa Cleo* (2245, 2250, 2276, 2300).

ANUL XXV. MAI 1945 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI: PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICA IN CARE INTERVIN FUNCTIILE PATRATICE.
2. NOTE MATEMATICE 5, 6 7.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1043, 1770, 2217, 2243, 2246, 2263.
5. PROBLEME PROPUSE: 2321–2328.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

«R. M. T.» mulţumeşte D-lui Prof. *I. V Mătieş*, membru în Comitet, pentru contribuţia benevolă de 5000 lei. Orice contribuţie de acest fel este binevenită în aceste timpuri când tiparul este foarte scump şi când Revista este ameninţată în existenţa ei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 1000 lei fiecare.

ANUL XXV — No. 3. TIMISOARA, MAI 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ IN CARE INTERVIN FUNCȚIILE PATRATICE.

DE

V. ALACI.

Vom tra'a două probleme de reprezentări grafice interesante, în care intervin funcțiile din „*Trigonometria patratică*".

Vom vedea că aceste reprezentări grafice dau configurații diferite de acelea obicinuite, fiind formate din segmente de drepte, sau arce de curbe continue, și care merită cred atenția noastră.

1. **Problemă.** *Se cere configurația având sistemul parametric.*

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2=2a^2 sp\,\theta \\ x^2-y^2=2a^2 cp\,\theta. \end{cases}$$

Soluție. Vom avea în vedere formula fundamentală din „*Trigonometria patratică*".

$$(2)\qquad |sp\,\theta|+|cp\,\theta|=1.$$

Din cauza periodicității funcțiilor $sp\,\theta$, $cp\,\theta$ care au perioada 2π, vom considera numai următoarele cazuri:

1°. *Cazul* $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$. Adunăm ecuațiile (1) și fiindcă în primul cadran relația (2) devine

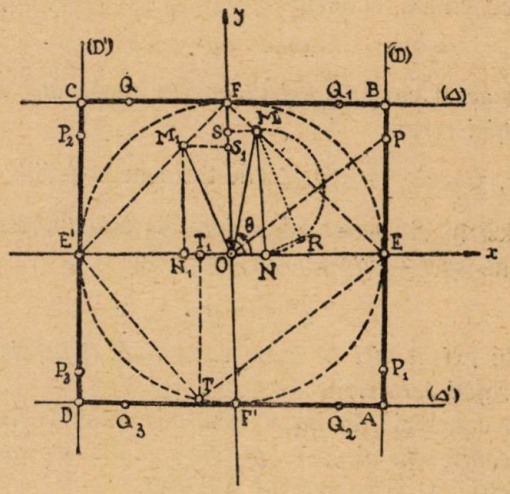
$$sp\,\theta+cp\,\theta=1,$$

obținem

$$x^2=a^2,\quad \text{deci}\quad (3)\ x=\pm a.$$

Față de un sistem de axe rectangulare xOy, observăm că ecuația (3) reprezintă două drepte (D) și (D') paralele cu axa Oy, respectiv la distanțele a și $-a$, (fig. 1).

Nu toate punctele acestor drepte aparțin însă configurației cerute, ci numai acelea compatibile cu ecuațiile (1), când facem pe θ să varieze în primul cadran, în care caz din ecuațiile (1) deducem inegalitățile



$$0\leqq a^2+y^2\leqq 2a^2$$

$$0\leqq a^2-y^2\leqq 2a^2$$

de unde deducem numai

$$(4)\qquad 0\leqq y^2\leqq a^2.$$

Din (4) rezultă $-a\leqq y\leqq a$, ceeace înseamnă că, *numai segmentele* AB *și* DC *ale dreptelor* (D) *și* (D') *aparțin configurației* (1).

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$. Scădem ecuațiile (1) și având în vedere că formula (2) pentru al 2-lea cadran devine $sp\,\theta-cp\,\theta=1$, obținem

$$y^2=a^2,\quad \text{sau}\quad y=\pm a,$$

ceiace înseamnă două drepte (Δ) și (Δ') paralele cu Ox, respectiv la distanțele a și $-a$. Nu toate punctele acestor drepte aparțin însă configurației noastre, ci numai acelea compatibile cu ecuațiile, (1), care când facem ca θ să varieze în al 2-lea cadran, ne dau inegalitățile

$$0 \leqq x^2 + a^2 \leqq 2a^2$$
$$-2a^2 \leqq x^2 - a^2 \leqq 0,$$

de unde deducem numai

(5) $$0 \leqq x^2 \leqq a^2.$$

Din (5) rezultă $-a \leqq x \leqq a$, ceeace înseamnă că, *numai segmentele* C B *şi* D A *aparţin configuraţiei cerute.*

3°. *Cazul* $\pi \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{2}$. Adunăm ecuaţiile (1) şi având în vedere că pentru al 3-lea cadran formula fundamentală (2) devine $sp\,\theta + cp\,\theta = -1$, obţinem

$$x^2 = -a^2.$$

In acest caz, *nu există puncte reale ale configuraţiei cerute.*

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{2} \leqq \theta \leqq 2\pi$. Scădem ecuaţiile (1) şi fiindcă în al 4-lea cadran formula fundamentală (2) devine $sp\,\theta - cp\,\theta = -1$, obţinem

$$y^2 = -a^2.$$

Nu există nici în acest caz puncte reale ale configuraţiei cerute.

In concluzie, în baza cazurilor studiate rezultă că, *configaţia ale cărei puncte satisfac sistemul parametric* (1) *este patratul* A B C D.

2. Acum, după ce am arătat că sistemul parametric (1) are ca reprezentare grafică patratul A B C D, se pun în mod natural întrebările:

Cum putem determina un punct P *al patratului* A B C D, *când se dă unghiul* θ *şi invers, când ne dăm un punct al configuraţiei* (1), *cum putem determina unghiul* θ *corespunzător?*

Vom observa întâi, că toate punctele patratului A B C D se obţin numai pentru $\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{4}$.

În adevăr, dacă un punct P este situat pe latura A B, sau C D, unde avem respectiv $x = \pm a$, atunci sistemul (1) devine

$$a^2 + y^2 = 2a^2\,sp\,\theta, \quad a^2 - y^2 = 2a^2\,cp\,\theta.$$

Aceste relaţii, pentru ca y să fie real, necesită

$$\frac{1}{2} \leqq sp\,\theta \leqq 1, \quad \text{deci} \quad \frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},$$

fiindcă ştim că θ este în primul cadran.

De asemeni, dacă un punct P este situat pe latura B C, sau C D, unde avem respectiv $y = \pm a$, sistemul (1) devine

$$x^2 + a^2 = 2a^2\,sp\,\theta, \quad x^2 - a^2 = 2a^2\,cp\,\theta.$$

Aceste relaţii, pentru ca x să fie real, necesită $\frac{1}{2} \leqq sp\,\theta \leqq 1$, deci $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{4}$, fiindcă θ ştim că este în al 2-lea cadran.

Şi acum să răspundem la întrebările puse.

a. **Determinarea lui P când se dă** θ.

1°. *Cazul* $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. În acest caz P trebuind să fie situat pe latura A B, sau C D, unde $x = \pm a$, sistemul (1) devine

$$a^2 + y^2 = 2a^2\,sp\,\theta, \quad a^2 - y^2 = 2a^2\,cp\,\theta,$$

şi având în vedere formula $1 = sp\,\theta + cp\,\theta$, deducem

$$y^2 = a^2\,(sp\,\theta - cp\,\theta) = a^2\,(sp^2\,\theta - cp^2\theta),$$

sau

(6) $$y^2 = (a\,sp\,\theta)^2 - (a\,cp\,\theta)^2.$$

Relaţia (6) ne spune că ordonata punctului căutat P, situat pe A B, sau C D, este cateta unui triunghiu dreptunghic de ipotenuză $a\,sp\,\theta$ şi o catetă $a\,cp\,\theta$, aceste din urmă lungimi putându-se construi cu uşurinţă astfel: Se duce O M (fig, 1) astfel că $\sphericalangle x\,O\,M = \theta$, M fiind pe dreapta E F ce uneşte mijloacele laturilor A B şi B C şi se coboară perpendiculara M N pe $O\,x$. În triunghiul dreptunghic O M N, conform unei teoreme din *„Trigonometria patratică“* p. 42, avem

$$M\,N = (M\,N + O\,N)\,sp\,\theta = a\,sp\,\theta, \quad O\,N = a\,cp\,\theta.$$

Construim deci un triunghiu dreptunghic de ipotenuză M N şi având o catetă N R egală cu O N; atunci cealaltă catetă M R este ordonata punctului căutat P situat pe A B, obţinut luând E P = M R. Dar şi punctele P_1, P_2, P_3, de aceiaşi ordonată în valoare absolută, corespund aceluiaşi unghiu dat θ.

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. În acest caz P este situat pe latura B C, sau D A, unde avem $y = \pm a$, deci sistemul (1) ne dă, analog ca în cazul precedent,

$$x^2 = |a\,sp\,\theta|^2 - |a\,cp\,\theta|^2,$$

în care s'a ţinut seamă de relaţia $1 = sp\,\theta - cp\,\theta$.

Absciza x a punctului căutat este astfel tot o catetă într'un triunghiu dreptunghic de ipotenuză $|a\,sp\,\theta|$ şi cealaltă catetă $|a\,cp\,\theta|$, lungimi ce se pot construi ducând OM_1 astfel ca $\sphericalangle xOM_1 = \theta$ (M_1 fiind pe FE' ce uneşte mijloacele laturilor BC şi CD) şi coborând M_1N_1 perpendiculară pe Ox. Lungimele necesare sunt astfel $M_1N_1 = |a\,sp\,\theta|$, $ON_1 = |a\,cp\,\theta|$, cu care, cum am arătat mai sus, se poate construi absciza punctului căutat, având şi în acest caz 4 puncte Q, Q_1, Q_2, Q_3 corespunzătoare unui θ dat.

b. **Determinarea lui θ când se dă poziţia punctului** P.

1°. *Cazul când* P *dat este situat pe* AB, *sau* CD.

Fie P situat pe AB de exemplu şi însemnăm $EP = k$. Coordonatele punctului P sunt (a, k) şi prima ecuaţie din sistemul (1) devine

$$a^2 + k^2 = 2a^2\,sp\,\theta. \tag{7}$$

Cum din figură avem

$$a^2 + k^2 = \overline{OP}^2 = m^2$$

relaţia (7) ne dă

$$m^2 = 2a\,.\,(a\,sp\,\theta). \tag{8}$$

Această relaţie ne permite a construi lungimea $a\,sp\,\theta$ şi în urmă unghiul θ, în felul următor.

Pe $E'E = 2a$ ca diametru descrim un semicerc, în care luăm coarda $E'T = OP = m$ şi ducem TT_1 perpendiculară pe Ox.

În triunghiul dreptunghic TEE' avem

$$\overline{TE'}^2 = \overline{E'E}\,.\,\overline{E'T_1},$$

sau

$$m^2 = 2a\,.\,E'T_1,$$

relaţie care comparată cu (8) ne dă

$$E'T_1 = a\,sp\,\theta$$

Luând acum pe Oy lungimea $OS = E'T_1$, ducând SM paralelă la Ox (M pe EF) şi unind O cu M rezultă cu uşurinţă că $\sphericalangle xOM$ este unghiul cerut θ, fiindcă $MN = a\,sp\,\theta$. Procedăm analog când P este situat pe latura CD.

2°. *Cazul când punctul dat, notat prin* Q *este situat pe* BC, *sau* DA.

Coordonatele punctului Q, în acest caz, sunt $(k, \pm a)$ cunoscute, astfel că prima ecuaţie din sistemul (1), devine

$$k^2 + a^2 = 2a\,.\,(a\,sp\,\theta) = m^2.$$

Lungimea $a\,sp\,\theta$ se poate construi şi aci analog ca în cazul precedent.

Luăm apoi pe Oy lungimea $OS_1 = a\,sp\,\theta$, prin S_1 ducem paralela SM_1 la Ox (M_1 pe FE') şi $\sphericalangle xOM_1$ este unghiul cerut θ.

3. Problemă. *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin sistemul.*

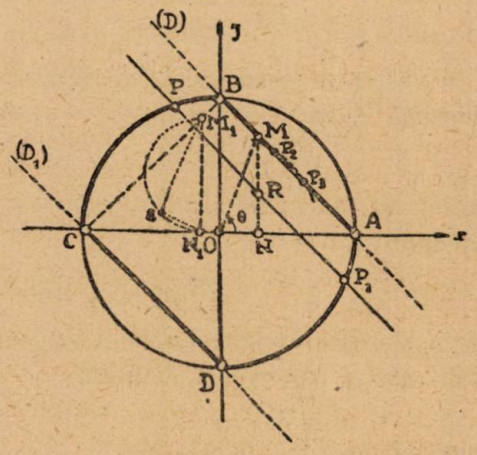
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2\,sp\,\theta \\ x^2 + y^2 - x - y = 2\,cp\,\theta. \end{cases} \tag{9}$$

Soluţie. Din cauza periodicităţii funcţiilor $sp\,\theta$, $cp\,\theta$, de perioada 2π, vom considera numai următoarele cazuri:

1°. *Cazul* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Adunăm ecuaţiile (9) şi fiindcă în primul cadran formula fundamentală (2) devine $sp\,\theta + cp\,\theta = 1$, obţinem

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{10}$$

care este ecuaţia unui cerc cu centrul în origină şi raza egală cu 1, (fig. 2).



Nu toate punctele acestui cerc aparţin însă configuraţiei, cerute ci numai acelea compatibile cu ecuaţiile (9), când facem ca θ să varieze în primul cadran, în care caz din ecuaţiile (9) deducem inegalităţile

$$0 \leq 1 + x + y \leq 2, \quad 0 \leq 1 - x - y \leq 2,$$

sau

$$-1 \leq x + y \leq 1. \tag{11}$$

Rezultă de aci că punctele cercului (10), compatibile cu sistemul (9), sunt numai acelea ale căror coordonate satisfac inegalităţile (11), adică acelea cuprinse între dreptele

$$x + y = -1 \quad \text{şi} \quad x + y = 1$$

ceea ce înseamnă că, *numai arcele* B C *şi* D A *ale cercului* (10) *aparţin configuraţiei cerute.*

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Scădem ecuaţiile (9) şi având în vedere că formula (2) pentru al 2-lea cadran devine $sp\,\theta - cp\,\theta = 1$, obţinem

$$x + y = 1,$$

care reprezintă dreapta (D). Nu toate punctele acestei drepte aparţin însă configuraţiei (9), ci numai acelea compatibile cu ecuaţiile (9), când facem ca θ să varieze în al 2-lea cadran, în care caz din ecuaţiile (9) deducem inegalităţile

$$0 \leq x^2 + y^2 + 1 \leq 2, \quad -2 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 0,$$

sau,

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad \text{(fiindcă } x^2, y^2 \text{ sunt } \geq 0\text{)}.$$

Ori numai punctele din interiorul cercului (10) satisfac aceste inegalităţi, deci, *numai punctele segmentului* A B *de pe dreapta* (D) *aparţin configuraţiei cerute.*

3°. *Cazul* $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$. Adunăm ecuaţiile (9) şi având în vedere că pentru al 3-lea cadran formula fundamentală (2) devine $sp\,\theta + cp\,\theta = -1$, obţinem

$$x^2 + y^2 = -1,$$

In acest caz, *nu există puncte reale ale configuraţiei cerute.*

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$. Scădem ecuaţiile (9) şi fiindcă în al 4-lea cadran formula fundamentală (2) devine $sp\,\theta - cp\,\theta = -1$, obţinem

$$x + y = -1,$$

care reprezintă dreapta (D_1). Nu toate punctele acestei drepte aparţin însă configuraţiei noastre, ci numai acelea compatibile cu ecuaţiile (9), când facem ca θ să varieze în al 4-lea cadran, în care caz, din ecuaţiile (9) deducem inegalităţile

$$-2 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 0, \quad 0 \leq x^2 + y^2 + 1 \leq 2$$

sau

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad \text{(fiindcă } x^2, y^2 \text{ sunt } \geq 0\text{)}.$$

Ori numai punctele din interiorul cercului (10), satisfac aceste inegalităţi, deci, *numai punctele segmentului* C D *situat pe dreapta* (D_1) *aparţin configuraţiei cerute.*

În concluzie, *numai punctele patrulaterului mixtiliniu* A B C D *format din segmentele de drepte* A B *şi* C D *şi din arcele de cerc* B C, D A *aparţin configuraţiei cerute.*

4. Vom răspunde acum la aceleaşi întrebări ca şi la problema precedentă, anume:

Cum determinăm un punct al patrulaterului mixtiliniu A B C D *când se dă unghiul* θ *şi invers, când ne dăm un punct al configuraţiei* (9), *cum putem determina unghiul* θ *corespunzător?*

a. **Determinarea lui** P **când se dă** θ.

1°. *Cazul* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. În acest caz P fiind situat pe arcele B C, sau D A ale cercului $x^2 + y^2 = 1$, sistemul (9) devine

$$(12) \qquad \begin{cases} 1 + x + y = 2\,sp\,\theta \\ 1 - x - y = 2\,cp\,\theta. \end{cases}$$

Fiindcă în primul cadran avem $1 = sp\,\theta + cp\,\theta$ ecuaţiile (12) ne dau

$$x + y = sp\,\theta - cp\,\theta.$$

Rezultă că coordonatele punctului P, satisfac simultan ecuaţiile

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = sp\,\theta - cp\,\theta, \end{cases}$$

unde $sp\,\theta - cp\,\theta$ se poate construi foarte simplu, ducând dreapta O M (M pe A B) astfel ca $\sphericalangle x\,O\,M = \theta$, apoi ducând perpendiculara M N pe Ox şi luând segmentul $M\,R = M\,N - O\,N = sp\,\theta - cp\,\theta$, cum uşor se observă; acest segment $M\,R = k$ putând fi $\gtrless 0$, după cum $sp\,\theta \gtrless cp\,\theta$.

Acum este clar că, intersecţia cercului $x^2 + y^2 = 1$ cu dreapta $x + y = k$, uşor de construit, ne dă punctele P şi P_1, ambele corespunzând unghiului dat θ.

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. În acest caz, P fiind situat pe segmentul de dreaptă A B, unde avem $x + y = 1$, sistemul (9) devine

$$(13) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2\,sp\,\theta \\ x^2 + y^2 - 1 = 2\,cp\,\theta \end{cases}$$

Cum în cadranul al 2-lea avem $1 = sp\,\theta - cp\,\theta$, ecuaţiile (13) ne dau

$$x^2 + y^2 = sp\,\theta + cp\,\theta = sp^2\,\theta - cp^2\,\theta.$$

Prin urmare coordonatele punctului căutat satisfac simultan sistemul

$$(14)\qquad \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=sp^2\theta-cp^2\theta=r^2. \end{cases}$$

Ecuaţia 2-a reprezintă un cerc de rază r, rază care se vede că este cateta unui triunghiu dreptunghic de ipotenuză $sp\,\theta$ şi catetă $cp\,\theta$, uşor de construit, luând $\sphericalangle x\,O\,M_1=\theta$ (M_1 pe BC), ducând perpendiculara M_1N_1 pe care descrim un semicerc şi luăm coarda $N_1S=ON_1=cp\,\theta$, de unde rezultă $SM_1=r$.

Vom construi apoi cercul $x^2+y^2=r^2$ şi intersecţiile P_2, P_3 cu dreapta AB, corespund ambele unghiului dat θ.

E de observat, că, pentru ca cercul şi dreapta menţionate să se intersecteze, trebue să avem

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq r\leq 1, \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2}\leq r^2\leq 1,$$

şi având în vedere prima ecuaţie din (13), deducem

$$\frac{1}{2}\leq 2\,sp\,\theta-1\leq 1, \quad \text{sau} \quad \frac{3}{4}\leq sp\,\theta\leq 1,$$

condiţie uşor de realizat practic, dat fiind că $sp\,\theta=M_1N_1$.

3°. *Cazul* $\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$. În acest caz, ştim din soluţia dată mai sus, că nu există puncte ale configuraţiei (2), care să corespundă unui unghiu θ din în al 3-lea cadran.

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{2}\leq\theta\leq 2\pi$. Punctul P corespunzător unui θ dat în al 4-lea cadran, ştim că trebuie să fie pe segmentul de dreaptă CD, unde avem $x+y=-1$, astfel că sistemul (9) devine

$$(15)\qquad \begin{cases} x^2+y^2-1=2\,sp\,\theta \\ x^2+y^2+1=2\,cp\,\theta. \end{cases}$$

Cum în al 4-lea cadran avem

$$-1=sp\,\theta-cp\,\theta,$$

sistemul (15) se reduce la ecuaţia,

$$x^2+y^2=sp\,\theta+cp\,\theta=cp^2\theta-sp^2\theta=r^2.$$

care reprezintă un cerc de rază r, rază care se vede că este cateta unui triunghiu dreptunghic de ipotenuză $cp\,\theta$ şi catetă $sp\,\theta$, uşor de construit, ca în cazul 2° de mai sus.

Punctul P este astfel intersecţia dreptei $x+y=-1$, cu cercul $x^2+y^2=r^2$.

Aceiaşi observare de la cazul 2° de mai sus, se menţine şi aici în privinţa mărimei razei r.

b. **Determinarea lui θ când se dă poziţia punctului** P.

1°. *Cazul când* P *este situat pe arcele de cerc* BC, *sau* DA.

Ducem prin punctul P dat, o paralelă la AB şi ecuaţia ei este

$$x+y=k$$

($k\gtrless 0$ fiind ordonata la origină, cunoscută).
Coordonatele punctului P satisfac simultan sistemul

$$\begin{cases} x_2+y^2=1 \\ x+y=k \end{cases}$$

şi prin urmare prima ecuaţie a sistemului (9) devine

$$1+k=2\,sp\,\theta,$$

deci

$$sp\,\theta=\frac{1+k}{2}.$$

Avem astfel lungimea lui $sp\,\theta$, uşor de construit.

Atunci, în patratul fundamental ABCD, putem avea şi unghiul θ din primul cadran, corespunzător punctului P dat.

2°. *Cazul când* P *este situat pe latura* AB, *în* P_2 *de exemplu.*

În acest caz, coordonatele (x_2, y_2) ale punctului P_1 satisfac, pe de o parte ecuaţia $x+y=1$, pe de altă parte vedem că $x_2^2+y_2^2=\overline{OP_1}^2=m^2$, cunoscut, deci sistemul (9) se reduce la,

$$m^2+1=2\,sp\,\theta,$$

de unde

$$(16)\qquad sp\,\theta=\frac{1+m^2}{2}>0.$$

Putem acum uşor construi $sp\,\theta$ dat de relaţia (16), şi deci unghiul θ din al 2-lea cadran, corespunzător:

3°. *Cazul când* P *este situat pe latura* CD.

Coordonatele lui P satisfac evident, în acest caz, ecuaţia $x+y=-1$ şi relaţia $x^2+y^2=\overline{OP}^2=m^2$, deci prima ecuaţie din sistemul (9) devine

$$m^2 - 1 = 2 sp\,\theta,$$

de unde

$$(17) \qquad sp\,\theta = \frac{m^2-1}{2} \leq 0.$$

Putem găsi acum prin construcție un unghiu θ din al 4-lea cadran, corespunzător lui $sp\,\theta$ din relația (17).

5. Se poate trata analog problema mai generală.

Să se reprezinte configurația având sistemul parametric

$$(18) \qquad \begin{cases} f(x,y) + \varphi(x,y) = 2\,\psi(x,y)\,sp\,\theta \\ f(x,y) - \varphi(x,y) = 2\,\psi(x,y)\,cp\,\theta, \end{cases}$$

funcțiile $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *fiind date.*

Am putea trata apoi problema intersecției unei configurații de forma (18) cu o dreaptă, cu o curbă sau cu o altă configurație de forma (18).

Am mai putea trata apoi problema inversă, adică:

Dându-se o configurație formată din patru arce de curbe diferite, dintre care trei le putem lua după voie, să se afle sistemul parametric corespunzător, de forma (18).

Vom reveni cu alte probleme asemănătoare interesante într'un alt articol.

NOTE MATEMATICE

5. — *Sur un triangle particulier.* Il s'agit du triangle A B C dans lequel les longueurs des côtés B C, C A, A B sont les nombres entiers

$$a = 5m(2m+1),\ b = 4m(2m+1),$$
$$c = (m+1)(6m+1),$$

m étant un entier positif arbitraire différent de zéro.

1°. Comme on a simultanément

$$b^2 + c^2 > a^2,\ c^2 + a^2 > b^2,\ a^2 + b^2 > c^2,$$

les angles A, B, C *sont aigus.*

2°. Avec les notations babituelles, on a successivement,

$$p = (2m+1)(6m+1),\ p - a = (m+1)(2m+1),$$
$$p - b = 4m(m+1),\ p - c = m(6m+1),$$

la surface

$$S = 2m(m+1)(2m+1)(6m+1),$$

$$h_c = 4m(2m+1) = b - 1\ ;\ 2R = \frac{5}{4}b\ ;$$

$$r = 2m(m+1) = \frac{1}{2}(p-b)\ ;$$

$$r_a = 2m(6m+1) = 2(p-c)\ ;$$

$$r_b = \frac{1}{2}(2m+1)(6m+1) = \frac{1}{2}p\ ;$$

$$r_c = 2(m+1)(2m+1) = 2(p-a)\ ;$$

$$r + r_b = \frac{1}{2}(a+c);\ r_a + r_c = 2b;\ r_a r_c = 4 r r_a = 2S.$$

Le pied C′ de la hauteur C C′ $= h_c$ partage le côté A B $= c$ en les segments rectilignes

$$A C' = 4m + 1 \text{ et } C' B = 3m(m+1).$$

N. B. Si $m = 1$, on retrouve le triangle en nombres entiers consécutifs

$$a = 15,\ b = 13,\ c = 14,$$

qui jouit de toutes les propriétés précitées et dans lequel on a en outre $h_c = r_c = 12$.

V. THÉBAULT.

6. — *Asupra unei probleme de algebră.*

În „*Algebra Superioară*“ a D-lui profesor *N. Abramescu* la pag. 71 găsim problema:

„*Să se rezolve ecuația:* $x^3 + px + q = 0$, *știind că:* $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$“.

Cum avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3 = p$$
$$-x_1 x_2 x_3 = q$$

urmează că:

$$x_1 = -(x_2 + x_3),$$

deci:

$$x_2 x_3 = 0,$$

prin urmare:

$$x_1(x_2 + x_3) = -x_1^2 = p.$$

Așa dar rezultă că:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-p} \quad \text{și} \quad x_3 = 0,$$

deci:

$$q = 0.$$

Condiția din problemă o poate satisface numai o ecuație de forma:

$$x^3 + p\,x = 0.$$

Verificarea pentru cazul numerelor întregi se poate face, dacă admitem:

$$x_1 = \alpha^2 + \beta^2; \quad x_2 = \alpha^2 - \beta^2; \quad x_3 = 2\,\alpha\,\beta.$$

Cum suma lor este nulă, rezultă că:

$$2\,\alpha\,(\alpha + \beta) = 0,$$

ceace ne dă:

$$x_1 = \beta^2 \text{ sau } 2\,\beta^2; \quad x_2 = -\beta^2 \text{ sau } 0;$$

$$x_3 = 0 \text{ sau } 2\,\beta^2.$$

Deci două rădăcini sunt egale şi de semn contrar, iar a treia este nulă.

COMANDOR I. LINTES

7. *Asupra eliminantului a două ecuaţiuni de gradul al 2-lea.*

Aceste ecuaţiuni fiind

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

$$\varphi(x) = a'\,x^2 + b'\,x + c' = 0,$$

dăm următoarea metodă, pentru obţinerea eliminantului.

Să observăm mai întâiu că dacă două ecuaţiuni $f(x) = 0$ şi $\varphi(x) = 0$ au rădăcini comune, ecuaţiunea

$$k_1 f(x) - k_2 \varphi(x) = 0$$

($k_1\,k_2$ constante) admite şi ea rădăcinile comune ale ecuaţiunilor f şi φ.

Luând mai întâiu

$$k_1 = a', \; k_2 = a,$$

rezultă că

$$x = -\frac{a\,c' - a'\,c}{a\,b' - a'\,b}$$

este o rădăcină comună a ecuaţiunilor dela cari am plecat.

Luând apoi

$$k_1 = c', \; k_2 = c,$$

avem

$$(a\,c' - a'\,c)\,x^2 + (b\,c' - b'\,c)\,x = 0.$$

De unde avem

$$x = -\frac{b\,c' - b'\,c}{a\,c' - a'\,c}$$

ca rădăcină comună căci $x = 0$ nu poate avea această calitate întrucât în general $c_1\,c_2 \neq 0$.

Egalând cele două valori ale lui x căpătăm

$$-\frac{a\,c' - a'\,c}{a\,b' - a'\,b} = -\frac{b\,c' - b'\,c}{a\,c' - a'\,c},$$

sau

$$(a\,b' - a'\,b)(b\,c' - b'\,c) - (a\,c' - a'\,c)^2 = 0$$

adică eliminantul căutat.

VIRGIL GHITESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, No. 8, Aprilie 1945. Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei omogene de gradul al doilea (urmare şi sfârşit), de *N. Georgescu-Roegen*. Premiul „Ing. *Al. Roşu*", de Avocat *Alex. Al. Roşu*, Prof. *P. Sergescu* şi Ing *D. Stoica*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Ştiinţă şi Progres*, Anul X, Nr. 3—5, Ianuarie-Martie 1945. *Lazare Carnot*, de *Caius Iacob*. Rezolvarea unor congruenţe, de *I. V. Mătieş*. Dezvoltarea Matematicei la Români, de *Filofteia Brătilă*. Prob eme rezolvate şi propuse.

3. Prof. Dr Ing *Nadaşan Ştefan* Curs de Rezistenţa materialelor şi Statica grafică, partea II-a

Este un curs litografiat de 340, cu 258 figuri lucrate cu cea mai mare îngrijire şi exactitate, curs de un mare randament pentru studenţii de la politehnici şi pentru ingineri.

PROBLEME REZOLVATE

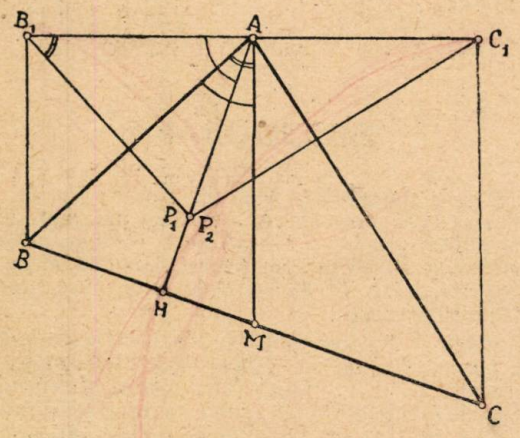
Problema 1043. — *In triunghiul* A B C, *paralelele cu mediana vârfului* A, *duse prin* B *şi* C, *întâlnesc perpendiculara pe aceiaşi mediană dusă prin* A, *în* B_1 *şi* C_1. *Să se arate că perpendicularele coborâte din* B_1 *şi* C_1, *respectiv pe* A B *şi* A C *concură pe înălţimea vârfului* A.

C. IONESCU-BUJOR

Soluţia I. Mediana A M trecând prin mijlocul lui B C şi fiind paralelă cu $B B_1$ şi $C C_1$ urmează că A este mijlocul lui $B_1 C_1$. Cercurile cu centrele în B, C şi cu razele $B B_1$, $C C_1$, sunt tangente în B_1, C_1 la $B_1 C_1$, iar coarda lor comună trece prin A_1 şi va fi perpendiculară pe linia centrelor B C, deci va fi tocmai înălţimea A H a triunghiului ABC. Pe de altă parte, coardele comune cercurilor precedente şi cercului de centru A şi diametru $B_1 C_1$ sunt perpendiculare pe liniile centrelor A B, A C şi cum coardele comune a 3 cercuri luate două câte

două sunt concurente. rezultă că cele două perpendiculare din enunț se întâlnesc pe înălțimea AH.

Soluția II. Fie P_1 intersecția înălțimei AH cu perpendiculara scoborâtă din B_1 și P_2 intersecția aceleiași înălțimi cu perpendiculara scoborâtă din C_1 pe AC. Observăm că triunghiurile MAB și P_1AB sunt asemeni pentru că au



$\sphericalangle AP_1B_1 = \sphericalangle ABM$ și $\sphericalangle P_1AB_1 = \sphericalangle AMB$

ca având laturile unghiurilor perpendiculare între ele. Pentru aceleași motive triunghiurile AP_2C și ACM sunt asemeni. Din aceste asemănări deducem

$$AP_1 = \frac{AB_1 \cdot BM}{AM} \quad \text{și} \quad AP_2 = \frac{AC_1 \cdot CM}{AM}.$$

Dar avem prin construcție

$$AB_1 = AC_1 \quad \text{și} \quad BM = CM$$

rezultă

$$AP_1 = AP_2$$

și cum P_1 și P_2 sunt de aceiași parte față de A, din cauză că B_1 și C_1 sunt simetrice față de A, urmează că P_1 și P_2 se confundă, ceia ce demonstrează proprietatea din enunț.

1°. D-l *Mecu Mihail*, când era în clasa III-a a Liceului „Cantemir" din București a trimis o soluție identică cu soluția I.

2°. Au dat bune soluții analoage cu soluția II, D-nii *Pop I. Leontin* și *Motoc D. Mircea*.

3°. Au folosit proprietatea din problema 20 Cap. IX *Culegere de Probleme de Geometrie* de *G. Țițeica* și au dat soluții foarte bune D-nii: *Coșniță Cezar*, *Ivănescu Cezar*, *Mihăileanu N. N.*, *Pop B Ioan*.

4°. Au dat bune soluții analitice D-nii: *Margulius Marius* și *Süli Mihai*.

Problema 1770. — *Să se găsească toate progresiile*

$$\div ab.cd.\ldots.mn.ba$$

cu termenii de două cifre, primul și ultimul fiind numere inversate.

G-L GH. BUICLIU

Soluție. Considerăm $ba > ab$, căci în caz contrar avem aceiași progresie cu termenii descrescători. Fie p și r numărul termenilor și rația progresiei. Avem

$$10b + a = 10a + b + (p-1)r$$

$$(1) \qquad r = \frac{9(b-a)}{p-1}.$$

Se observă că $p > 2$, deci $p - 1 > 1$, căci progresiile aritmetice de 2 termeni nu au senz. Apoi din condiția inițială rezultă $b > a$, iar din (1) se vede că $p - 1$ este un divizor, diferit de 1, al produsului $9(b-a)$. In fine $b - a > 0$ poate avea valorile

$$(2) \qquad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Dăm lui $(b-a)$ în (1) pe rând valorile șirului (2), după care deducem pe $p-1$, divizor al lui $9(b-a)$, pe r și apoi pe ab și deci progresiile respective.

Convenim în prealabil a nota cu

$$\div x..y_r$$

o progresie aritmetică cu rația r având ca prim și ultim termen pe x și y.

$$1^0.\ b - a = 1. \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad r = \frac{9}{p-1} \quad \text{deci}$$

$$p - 1 = 3 \text{ sau } 9 \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad p = 4 \text{ sau } 10.$$

$$r = 3, \text{ sau } 1.$$

Din valoarea lui $b - a$ se deduc pentru a și b valorile

$$\begin{array}{c|c} a & 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ \hline b & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \end{array}.$$

Pentru $p = 4$ și $r = 3$ avem următoarele 9 progresii

$$\div 01 \cdot\cdot 10_3\ ;\ \div 12 \cdot\cdot 21_3\ ;\ \div 23 \cdot\cdot 32_3\ ;\ \div 34 \cdot\cdot 43_3$$

$$\div 45 \cdot\cdot 54_3\ ;\ \div 56 \cdot\cdot 65_3\ ;\ \div 67 \cdot\cdot 76_3\ ;\ \div 78 \cdot\cdot 87_3$$

$$\div 89 \cdot\cdot 98_3\ ;$$

Pentru $p = 10$ și $r = 1$ avem 9 progresii:

$\div 01 \cdot\cdot 10_1$; $\div 12 \cdot\cdot 21_1$; $\div 23 \cdot\cdot 32_1$; $\div 34 \cdot\cdot 43_1$;

$\div 45 \cdot\cdot 54_1$; $\div 56 \cdot\cdot 65_1$; $\div 67 \cdot\cdot 76_1$; $\div 78 \cdot\cdot 87_1$;

$\div 89 \cdot\cdot 98_1$.

2°. $b - a = 2$. Avem

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{0,1,2,3,4,5,6,7}{2,3,4,5,6,7,8,9}$$

$r = \frac{18}{p-1}$ $\therefore$ $p = 3,4,7,10,19$ şi $r = 9,6,3,2,1$

şi avem următoarele 40 progresii

$\div 02 \cdot\cdot 20_i$; $\div 13 \cdot\cdot 31_i$; $\div 24 \cdot\cdot 42_i$; $\div 35 \cdot\cdot 53_i$;

$\div 46 \cdot\cdot 64_i$; $\div 57 \cdot\cdot 75_i$; $\div 68 \cdot\cdot 86_i$; $\div 79 \cdot\cdot 97_i$;

unde i are pe rând valorile 9, 6, 3, 2 şi 1.

3°. $b - a = 3$. Găsim

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{0,1,2,3,4,5,6}{3,4,5,6,7,8,9}$$

$r = \frac{27}{p-1}$ $\therefore$ $p = 4,10,28$ şi $r = 9,3,1$

şi avem următoarele 21 progresii

$\div 03 \cdot\cdot 30_i$; $\div 14 \cdot\cdot 41_i$; $\div 25 \cdot\cdot 52_i$; $\div 36 \cdot\cdot 63_i$;

$\div 47 \cdot\cdot 74_i$; $\div 58 \cdot\cdot 85_i$; $\div 69 \cdot\cdot 96_i$;

unde i are pe rând valorile lui r.

4°. $b - a = 4$. Avem

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{0,1,2,3,4,5}{4,5,6,7,8,9}$$

$r = \frac{36}{p-1}$; $p = 3,4,5,7,10,13,19,37$ cu

$r = 18,12,9,6,4,3,2,1$

şi avem următoarele 42 progresii

$\div 04 \cdot\cdot 40_i$; $\div 15 \cdot\cdot 51_i$; $\div 26 \cdot\cdot 62_i$; $\div 37 \cdot\cdot 73_i$;

$\div 48 \cdot\cdot 84_i$; $\div 59 \cdot\cdot 95_i$;

i având valorile lui r.

5°. $b - a = 5$. Găsim 25 progresii cu următoarele elemente

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{0,1,2,3,4}{5,6,7,8,9}$$

$r = \frac{45}{p-1}$; $p = 4,6,10,16,46$ cu $r = 15,9,5,3,1$

$\div 05 \cdot\cdot 50_r$; $\div 16 \cdot\cdot 61_r$; $\div 27 \cdot\cdot 72_r$;

$38 \cdot\cdot 83_r$; $\div 49 \cdot\cdot 94_r$;

6°. $b - a = 6$. Avem 28 progresii

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{0,1,2,3}{6,7,8,9}$$

$r = \frac{54}{p-1}$; $p = 3,4,7,10,19,28,55$ cu

$r = 27,18,9,6,3,2,1$

$\div 06 \cdot\cdot 60_r$; $\div 17 \cdot\cdot 71_r$; $\div 28 \cdot\cdot 82_r$; $\div 39 \cdot\cdot 93_r$;

7°. $b - a = 7$. Găsim 15 progresii

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{0,1,2}{7,8,9}; \quad 2 = \frac{63}{p-1}$$

$p = 4,8,10,22,64$ şi $r = 21,9,7,3,1$

$\div 07 \cdot\cdot 70_r$; $\div 18 \cdot\cdot 81_r$; $\div 29 \cdot\cdot 92_r$;

8°. $b - a = 8$. Găsim 22 progresii

$a = 0,1$ şi $b = 8,9$

$r = \frac{72}{p-1}$; $p = 3,4,5,7,9\ 10,13,19,25,37,43$

$r = 36,24,18,12,9,8,6,4,3,2,1$

$\therefore$ $\div 08 \div 80_r$ şi $\div 19 \div 91_r$.

9°. $b - a = 9$. Avem 4 progresii

$a = 0$, $b = 9$; $r = \frac{81}{p-1}$ $p = 4,10,28,82$;

$r = 27,9,3,1$ $\therefore$ $\div 0.9..90_r$.

In total problema are deci 221 soluţii cu termenii *numere întregi*. Dacă se împarte fie-care termen al celor 221 progresii prin 10^n se obţin alte serii decâte 221 soluţii cu termeni *numere zecimale* pentru fie care valoare a lui n, ca de exemplu soluţii

$\div 1,8 . 3,9 . 6,0 . 8,1$. etc.

D-l *Modâlcă S. Emil* (Bacalaureat, Turnu-Severin este singurul care a rezolvat complect problema găsind *toate* progresiile aşa cum se cerea în enunţ. D-sa plecând de la egalitatea (1) a găsit limite pentru p şi apoi a dat lui p pe rând ce e 20 valori pe care le poate avea şi a dedus valorile pe care le poate avea b-a.

D-l *Costescu Gh. Ioan* (L. „Eminescu", Bucureşti) a găsit toate cele 221 soluţii numere întregi.

Au rezolvat parţial problema găsind numărul de soluţii întregi arătat în paranteza de după nume, D-nii: (184); *Jidanu S. Constantin* (176) şi *Popescu N. Corneliu* (130).

Nu se găsesc progresii geometrice în condiţiile enunţului.

Problema 2217. — *Să se găsească un număr de cinci cifre, a cărui rădăcină cubică este numărul format cu primele sale două cifre.*

M GHERMANESCU

I. *Soluție* dată de d-nii *Creța Gavril* și *Giurconiu Mihail* (Studenți, Politehnica Timișoara). Fie N^3 numărul căutat de cinci cifre, iar M numărul format cu ultimele sale trei cifre; după enunț, avem

$$N^3 = 1000\,N + M, \tag{1}$$

sau $N(N^2 - 1000) = M$, care arată că $N^2 > 1000$, deci $N > 31$. Deducem apoi

$$N^2 - 1000 = \frac{M}{N}.$$

Însă $31 < N \leqq 46$, iar $100 \leq M \leq 999$, deci

$$\frac{100}{46} < N^2 - 1000 < \frac{999}{31} = 32,\ldots$$

așa că $31 < N < 32$, deci $N = 32$. Avem, în adevăr,

$$32^3 = 32.768,$$

care constitue singura soluție a problemei.

II. *Soluție* dată de Dl *Stanciu Petru* (Timișoara). Din (1), deducem

$$N^2 = \frac{1000\,N + M}{N} = 1000 + M = 1\,c\,d\,e.$$

Pentru ca $1\,c\,d\,e \times N$ să înceapă cu N, este necesar și suficient ca $c = 0$, deci

$$1000 < N^2 = 10\,d\,e < 1099,$$

care duce la $31 < N < 33$, deci $N = 32$.

Notă. 1° Au dat soluții mai puțin riguroase D-nii: *Anton Ioan*, *Constantinescu N. Ilie*, Lt. *Enache Ion*, *Țincu Const.* și *Tutor Aurel.*

2° D-l *Constantinescu N. Ilie* arată că problema se găsește și în Culegerea de probleme de aritmetică rațională a D-lui *I. Ionescu*, pag. 152. Eu am propus-o ca un caz particular al problemei 5906, ce am pro us în „*Gazeta Matematică*".

3° Numeroși corespondenți au găsit numărul 32^3 prin încercări sau prin table. Când vor înțelege odată că problemele de acest fel se propun pentru raționamentul pe care-l cere găsirea soluției, iar nu pentru soluția în sine!?

M. G.

Problema 2243. — *Să se demonstreze că expresia*

$$\frac{\Sigma\,[a\lambda^2 + (a + c - b)\lambda + c]^2}{(1 + \lambda + \lambda^2)^2}$$

este independentă de λ.

V. ALACI

Soluție. Însemnând cu N numărătorul, putem scri

$$N = \Sigma\,[a\lambda^2 + (a + c - b) + c]^2 =$$

$$\Sigma[a^2\lambda^4 + (a + c - b)^2\lambda^2 + c^2 + 2(a^2 + ac - ab)\lambda^3 + 2ac\lambda^2 + 2(ac + c^2 - bc)\lambda],$$ sau

$$N = \lambda^4\Sigma a^2 + 2\lambda^3\Sigma(a^2 + ac - ab + \lambda^2\Sigma[(a + c - b)^2 + 2ac] + 2\lambda\Sigma(ac + c^2 - bc)\lambda + \Sigma c^2. \tag{1}$$

Să calculăm coeficienții termenilor ce conțin pe λ la diferite puteri, observând în prealabil că

$$\Sigma(ab - ac) = ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0.$$

În virtutea acestei relații și a altora analoage, avem

$$\Sigma a^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\Sigma(a^2 + ac - ab) = \Sigma a^2 + \Sigma(ac - ab) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Sigma[(a + c - b)^2 + 2ac] =$$

$$\Sigma(a^2 + c^2 + b^2 + 2ac - 2ab - 2bc + 2ac) =$$

$$3\Sigma a^2 + 2\Sigma(ac - ab) + 2\Sigma(ac - bc) = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\Sigma(ac + c^2 - bc) = \Sigma c^2 + \Sigma(ac - bc) = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\Sigma c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Înlocuind aceste valori în (1), observând că $a^2 + b^2 + c^2$ este factor comun, avem

$$N = (a^2 + b^2 + c^2)(\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1) =$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\lambda^2 + \lambda + 1)^2$$

și prin urmare rezultă

$$\frac{\Sigma\,[a\lambda^2 + (a + c - b)\lambda + c]^2}{(1 + \lambda + \lambda^2)^2} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Soluții bune date de d-rele *Măran Ana* (Polit, Timișoara), *Tarța Valeria* (Polit., Timișoara) și de d-nii: *Barbu Ion* (Caracal), *Birănaș Ioan* (Arad), *Chesaru Cristea* (Polit., Timișoara), *Constantinescu Ilie* (Brăila), Costea Florian (Lic. Beiuș), *Filimon Ioan* (Lic. Militar, Timișoara), *Grigore Gheorghe*, *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *London Emeric* (Polit, Timișoara), *Nedelcu Ulpius* (Lic. Militar, Timișoara), *Ovesea Nicolae* (Polit., Timișoara), *Popescu Barbu* (Lic. Militar, Timișoara), *Simcso Carol* (Polit. Timișoara), *Stanciu Petre* (Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara), *Tutor Aurel* (Făgăraș), *Țigănoiu Alexandru* (Polit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Soluția autorului. Am arătat în nota matematică No. 11 din „R. M. T.", vol. XVIII p. 67, că sistemul de ecuații

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2, \end{cases}$$

admite următorul sistem de soluții, în numere raționale

$$(A_1)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{b\lambda^2+(a+b-c)\lambda+a}{\lambda^2+\lambda+1} \\ y=\dfrac{a\lambda^2+(a+c-b)\lambda+c}{\lambda^2+\lambda+1} \\ z=\dfrac{c\lambda^2+(b+c+a)\lambda+b}{\lambda^2+\lambda+1} \end{cases}$$

Prin urmare sistemul de soluţii (A_1) verifică sistemul (A), înlocuindu-l deci în a 2-a ecuaţie din (A), avem

$$\frac{\Sigma[a\lambda^2+(a+c-b)\lambda+c]^2}{(1+\lambda+\lambda^2)^2}=a^2+b^2+c^2,$$

astfel rezultă că expresia dată este independentă de λ.

Problema 2246. — *Să se demonstreze relaţiile următoare între elementele obicinuite ale unui triunghiu*

$$-bc+ca+ab=-(p-a)^2-r_a^2+4Rr_a$$
$$bc-ca+ab=-(p-b)^2-r_b^2+4Rr_b$$
$$bc+ca-ab=-(p-c)^2-r_c^2+4Rr_c$$
$$a^2+b^2+c^2=2(p-a)^2-2r_a^2+8Rr_c=$$
$$2(p-b)^2-2r_b^2+8Rr_b=2(p-c)^2-2r_c^2+8Rr_c$$

V. THÉBAULT

Soluţie. Este suficient, evident, să stabilim numai următoarele două relaţii

(1) $\quad -bc+ca+ab=-(p-a)^2-r_a^2+4Rr_a$

(2) $\quad a^2+b^2+c^2=2(p-a)^2-2r_a^2+8Rr_a,$

celelalte obţinându-se respectiv din acestea prin permutări circulare.

1. *Stabilirea relaţiei* (1). Notând cu E membrul al 2-lea al relaţiei (1) şi având în vedere relaţiile cunoscute

$$r_a=\frac{s}{p-a},\quad 4R=\frac{abc}{s},\quad s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

putem scri succesiv

$$E=-(p-a)^2-r_a^2+4Rr_a=-(p-a)^2-\frac{s^2}{(p-a)^2}+\frac{abc}{p-a}=$$
$$-(p-a)^2-\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{abc}{p-a}=$$
$$\frac{-(p-a)^3-p(p-b)(p-c)+abc}{p-a}=$$
$$\frac{-2p^3+3p^2a-3pa^2+a^3-pbc+p^2b+p^2c+abc}{p-a}=$$
$$\frac{-2p^3+p^2(c+b+c)+2p^2a-3pa^2+a^3-pbc+abc}{p-a}=$$
$$\frac{a^3+2pa(p-a)-pa^2-pbc+abc}{p-a}=$$
$$\frac{-a^2(p-a)+2pa(p-a)-bc(p-a)}{p-a}=$$
$$-a^2+2pa-bc=-a^2+(a+b+c)a-bc,$$

simplificând încă, avem

$$E=-bc+ca+ab.$$

Astfel relaţia (1) este o adevărată.

2. *Stabilirea relaţiei* (2). Ţinând seamă de relaţia stabilită (1), putem scri succesiv

$$2(p-a)^2-2r_a^2+8Rr_a=2[-(p-a)^2-r_a^2+4Rr_a]+$$
$$4(p-a)^2=2(-bc+ca+ab)+(2p-2a)^2=$$
$$-2bc+2ca+2ab+(b+c-a)^2=$$
$$-2bc+2ca+2ab+b^2+c^2+a^2+2bc-2ba-2ca$$

şi simplificând obţinem,

$$2(p-)^2-2r_a^2+8Rr_a=a^2+b^2+c^2,$$

astfel că şi relaţia (2) este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Constantinescu Ilie*, (Lic. Brăila), *Grigore Gheorghe*, *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Pop Emil*, (Polit., Timişoara), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor Aurel* (Făgăraş) şi *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara).

Problema 2263. — *Să se arate că într'un triunghiu* A B C, *în care razele cercurilor exînscrise sunt în progresie aritmetică, există relaţia*

$$b=2p\,\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}.$$

EUGEN SIPOS

Soluţie. Razele cercurilor exînscrise fiind în progresie aritmetică, avem relaţia

(1) $\quad 2r_b=r_a+r_c,$

care în virtutea formulelor cunoscute

$$r_a=\frac{s}{p-a},\qquad \mathrm{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-a)}}$$

şi analoagelor lor, devine

$$\frac{2s}{p-b}=\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-c}=\frac{s(2p-ac}{(p-a)(p-c)},$$

sau

$$\frac{2}{p-b}=\frac{b}{(p-a)(p-c)}.$$

De aci deducem

$$b=\frac{2(p-a)p-c)}{p-b}=2p\cdot\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)},$$

sau

$$b=2p\,\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}.$$

Soluţii date de d-nii: *Barbu Ioan, Birănaş Ioan* (Arad), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Braşoveanu Gheorghe* (Craiova), *Chesaru Cristea* (Polit. Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Gligor Ioan* (student, Timişoara), *Godea I.* (Polit, Timişoara), *Kluger Ioan, London Emeric* (Polit., Timişoara), *Mazilu M., Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit, Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

PROBLEME PROPUSE

2321. — Dacă un număr se adună cu cubul său, se obţine o sumă, care împărţită prin 27 ne dă rest 1. Care sunt soluţiile problemei?

I. V. MATIES

2322. — Să se arate că, dacă

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

atunci polinomul

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)\,a_3x+b_3y+c_3)$$

se descompune într'un produs de două expresii lineare cu coeficienţi reali sau imaginari, după cum una oarecare dintre expresiile,

$$E_1=A_1^2+4A_2A_3$$

$$E_2=B_1^2+4B_2B_3$$

$$E_3=C_1^2+4C_2C_3$$

este pozitivă sau negativă, A_n, B_n şi C_n fiind respectiv subdeterminaţii elementelor a_n, b_n şi c_n, unde $n=1,2,3$.

MARIA NEUMANN

2323. — Să se studieze variaţia funcţiei

$$y=L(x+3)+\frac{5x+2}{2(x+1)^2}$$

şi să se reprezinte grafic.

E. ARGHIRIADE

2324. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y+\mathrm{tg}\,z=a \\ \mathrm{tg}\,2x+\mathrm{tg}\,2y+\mathrm{tg}\,2z=b \\ \mathrm{tg}\,(x+y+z)=c \end{cases}$$

Să se discute sistemul în cazul particular $b=0$.

CPT. MIRCEA GRUMAZESCU

2325. — In cercul O, coarda CD tae diametrul AB într'un punct L. Perpendiculara coborâtă din C pe diametrul AB tae coarda AD în punctul M, iar perpendiculara din D pe AB tae coarda CB în punctul N.

Să se demonstreze că punctele L, M N sunt coliniare.

CPT. AURELIAN STAN

2326. — a, b, A fiind trei unghiuri cuprinse între 0° şi 180°, să se studieze cum sunt inegalităţile

$$\sin a>\sin b\sin A$$

$$\mathrm{tg}\,a>\sin b\,\mathrm{tg}\,A,$$

una faţă de alta.

GH. ŢF. GHEORGHIU

2327. — Să se rezolve un triunghiu între elementele căruia există relaţiile

$$a+b=c^2,\ a^3+b^3=c^4,\ l_c=c\,\mathrm{cotg}\,C,$$

l_c fiind una din bisectoarele unghiului C

G-L GH. BUICLIU

2328. — Să se reprezinte configuraţia având sistemul parametric

$$\begin{cases} x+a^2=2a^2sp\,\theta \\ 2y^2-x-a^2=2a^2cp\,\theta. \end{cases}$$

Dându-se unghiul θ să se determine punctul P corespunzător al configuraţiei şi invers.

V. ALACI

Erată. 1°. In articolul din numărul precedent, în ecuaţia (II), în loc de $(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}})^n$ trebuie $(-\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}})^n$; la sfârşitul rândului precedent în loc de 1, trebuie $(-1)^n$; de asemeni în ecuaţia (III), în loc de 2^n trebuie $(-2)^n$.

Erată. 2° La problema 2318, în loc de $\prod_{k=0}^{3}\left[\alpha+\frac{(1-2k)\pi}{8}\right]=1$, trebuie evident înlocuit prin $\prod_{k=0}^{3}\mathrm{cotg}\left[\alpha+\frac{(1-2k)\pi}{8}\right]=1$.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Acél Ioan (2311): *Bagiu Ioniţă* (2210, 2233, 2241, 2247, 2252, 2265; *Beşchea Radu* (2305, 2311, 2312); *Birănaş Ioan* (2132, 2135, 2142, 2221, 2244, 2279, 2284, 2290, 2293); *Chesan Cristea* (P; 2250, 2296, 2309, 2311, 2312), *Constantînescu Ilie* (P; 2104, 2158, 2183, 2215, 2224, 2232, 2248, 2288, 2290, 2293, 2297, 2298, 2300, 2301, 2302, 2303, 2305, 2310, 2311, 2312); *Filip Petre* (2305); *Georgescu Hristu* (2305, 2311, 2312, 2316), *Gligor Ioan* (P; 1661, 1838, 1877, 1897, 1917, 2193, 2241, 2318), *Goldis Gh.* (2289, 2290, 2297, 2301, 2305)? *Overea Nicolae* (2210, 2244, 2261, 2271, 2272, 2279, 2285, 2287, 2288, 2293, 2296, 2299, 2300, 2302, 2304, 2305, 2310, 2311, 2312); *Perö Ştefan* (2310); *Pop Emil* (2305, 2261, 2285, 2310, 2312); *Stanciu Petre* (P; 1842, 1555, 1687, 1717, 1737, 1741, 1849, 2203, 2215, 2250, 2257, 2260, 2265, 2271, 2272, 2275, 2287, 2290, 2293, 2298, 2299, 2300, 2301, 2305, 2310, 2311, 2320 *Tincu C-tin* (2284, 2285, 2288, 2289, 2293, 2305, 2311, *Wegener Eugen* (1952, 2217, 1305).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXV. IUNIE 1945 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTR. A ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **VICTOR VALCOVICI:** ASUPRA UNEI PROBLEME DE ALGEBRA VECTORIALA.
2. **M. GHERMANESCU:** REDUCEREA TORSORILOR LA DIADE.
3. NOTE MATEMATICE 8, 9.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 2010, 2232, 2244, 2256, 2264, 2285.
6. PROBLEME PROPUSE: 2329–2336.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 1000 lei fiecare.

ANUL XXV — No. 4. TIMISOARA, IUNIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE ALGEBRĂ VECTORIALĂ

DE

VICTOR VÂLCOVICI.

Articolul d-lui *M. Ghermănescu*: „Reducerea torsorilor la diade“ publicat în R. M. T., Nr. 1,an. XXV 1945, p. 1, îmi dă prilejul să menționez o serie de fenomene vectoriale, în speranța că astfel vom păși mai repede spre o unificare de limbaj și de notații de care se simte o mare nevoe.

Pentru a evita riscuri și nedumeriri, voiu schița însăși fundamentele geometrice ale teoriei vectorilor. Socot că această schiță ar putea fi de folos corespondenților R. M. T., cu atât mai mult, cu cât ea nu se găsește nicăiri — după cât știu — într'o formă concentrată și simplificată la esență.

Definiții fundamentale. *Axă. Vector. Proiecție.*

O dreaptă D pe care ne-am fixat sensul pozitiv se numește *axă.*

Un segment AB din dreapta D, căruia îi atribuim un sens, s. ex. de la A la B, îl vom numi *vector* și-l vom însemna cu $\overline{AB}$. Vom spune că:

1°. *mărimea* sa este egală cu lungimea segmentului AB;

2°. *sensul* său este sensul de la A la B;

3°. *suportul* său este dreapta D;

4°. *direcția* sa este orice paralelă la D (punctul de la infinit al dreptei D);

5°. *punctul său de aplicație* este A.

Dintre aceste cinci însușiri ale vectorului AB, trei sunt suficiente pentru a-l determina și anume:

mărimea, direcția și *sensul.*

Așa dar, potrivit acestei convenții, doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, așezați unul pe dreapta D altul pe o paralelă D′ la D, sunt egali între ei dacă au aceiași mărime și același sens:

$$\bar{a} = \bar{b}$$

și vice versa, din egalitatea a doi vectori nu putem trage altă concluzie de cât că ei au aceiași mărime, aceiași direcție și același sens. Prin urmare există ∞^3 vectori în spațiu, egali cu vectorul $\overline{AB}$.

Un vector $\bar{u}$ având mărimea egală cu unitatea și sensul lui $\overline{AB}$ se numește *versorul* lui AB:

$$\bar{u} = \text{vers}\,\overline{AB}.$$

Vectorul $\overline{BA}$ are sensul opus:

$$\overline{AB} = -\overline{BA}, \quad \overline{BA} = -\overline{AB}.$$

Fie Δ' o nouă axă având versorul $\bar{u}'$:

$$\bar{u}' = \text{vers}\,\Delta'.$$

Să însemnăm cu θ unghiul cuprins între zero și π, pe care-l închid între ei versorii $\bar{u}$ și $\bar{u}'$ (versorul lui $\overline{AB}$ cu versorul lui Δ'). Vom spune că θ este unghiul între versorii $\bar{u}$ și $\bar{u}'$ sau între vectorul $\overline{AB}$ și axa Δ' și vom scrie:

$$\theta = \widehat{(\bar{u}, \bar{u}')} \text{ sau } = \widehat{(\overline{AB}, \Delta')}.$$

Proiectând ortogonal punctele A și B respectiv în A′ și B′ pe axa Δ', obținem un nou vector $\overline{A'B'}$ având mărimea $AB\cos\theta$ și sensul de la A′ la B′. Mărimea acestui vector luată cu semnul *plus* sau *minus* după cum vectorul $\overline{A'B'}$ are același sens cu Δ' sau sens contrariu, se numește *proiecția vectorului* $\overline{AB}$ *pe axa* Δ'.

Se deduce imediat că:

1°. Valoarea *algebrică* a proiecțiunii vectorului $\bar{v}$ pe axa Δ' este:

$$P_{r_{\Delta'}}\bar{v} = |\bar{v}|\cos(\bar{v}, \Delta');$$

2°. Proiecţiile vectorilor egali cu $\bar{v}$, pe orice axă având aceiaşi direcţie şi acelaşi sens cu Δ' sunt egale între ele.

Cu ajutorul acestor noţiuni se trece uşor la reprezentarea unui vector prin cele trei proiecţiuni ale sale pe trei axe trirectangulare Ox, Oy, Oz, ce se întâlnesc în O.

Aşa dar, *un vector este în mod univoc determinat prin proiecţiile sale pe axele de coordonate* Ox, Oy, Oz.

Vectori legaţi şi *vectori glisanţi.* Dacă vectorul $\bar{v}$ este obligat să aibă un anumit punct de aplicaţie A atunci pentru determinarea sa în spaţiu va fi nevoe şi de coordonatele punctului A, sau de vectorul $\bar{r}$ de poziţie al acestui punct. Un atare vector având un anumit punct de aplicaţie se numeşte *vector legat.* El se determină prin cunoaşterea a şease proiecţiuni (trei ale vectorului $\bar{v}$ şi trei ale vectorului de poziţie $\bar{r}$).

Dacă vectorul $\bar{v}$ îşi poate muta punctul de aplicaţie oriunde pe suportul său D, atunci el este un vector *glisant.* Determinarea sa în spaţiu se va face deci prin intermediul a cinci numere (trei proiecţiuni ale vectorului $\bar{v}$ şi trei coordonate ale punctului de aplicaţie, care însă evident nu sunt arbitrare, de oarece ele reprezintă un punct pe dreapta D).

Cu aceste pregătiri se poate trece la operaţiunile cu vectori: adunarea şi cele trei feluri de produse (produs cu un scalar, produs scalar întrei doi vectori, produs vectorial între doi vectori) asupra cărora nu mă voi opri.

Sisteme de vectori. *Torsor.* Fie $\bar{v}_{ik}\,(k=1,2,\ldots,n_i$ n_i vectori legaţi sau glisanţi aplicaţi în punctul A_i având vectorul de poziţie $\bar{r}_i$ faţă de originea $O\,(i=1,2,\ldots,n)$. Vectorii $\bar{v}_{ik}$ constitue *un sistem de vectori* (legaţi sau glisanţi) pe care-l vom însemna cu $(\bar{v})$.

Suma $\bar{R}$ a tuturor vectorilor $\bar{v}_{ik}$:

$$\bar{R}=\sum_{i,k}\bar{v}_{ik}$$

se numeşte *vectorul rezultant* al sistemului $(\bar{v})$, iar suma momentelor lor faţă de O:

$$M_0=\sum_{i,k}\bar{r}_i\times\bar{v}_{ik}$$

se numeşte *momentul rezultant* al sistemului $(\bar{v})$ faţă de O.

Grupul de doi vectori $\bar{R}$, $\overline{M_0}$ constitue *torsorul* în O al sistemului $(\bar{v})$. Il vom însemna cu $T_0[(v)]$, sau mai simplu cu $T[(v)]$ când nu există pericolul unei confuzii.

În cazul când $(\bar{v})$ se reduce la un singur vector *glisant*, torsorul corespunzător determină complect acel vector.

Operaţia elementară. Înlocuirea vectorilor $\bar{v}_{ik}$ cu punctul de aplicaţie în A_i, prin alţi vectori $\bar{v}_{ik'}\,(k'=1,2,\ldots,n)$ având aceiaşi sumă

$$\sum_{k'}\bar{v}_{ik'}=\sum_{k}\bar{v}_{ik}$$

se numeşte o *operaţie elementară.* Este evident că grupul operaţiilor elementare lasă torsorul în O neschimbat.

La vectorii glisanţi operaţia elementară astfel definită se complectează cu alunecarea punctului de aplicaţie al vectorului pe suportul său.

Dacă un sistem de vectori $(\bar{v}')$ se poate deduce din $(\bar{v})$ printr'un număr de operaţii elementare, el se *zice echivalent* cu $(\bar{v})$:

$$(\bar{v}')=(\bar{v}).$$

Două sisteme echivalente au acelaşi torsor. Proprietatea este evidentă din cauza distributivităţii operatorului T.

Reciproca nu este adevărată de cât pentru sisteme de vectori *glisanţi.*

Sistemul de vectori glisanţi corespunzând unui torsor dat. Vom presupune, pentru a contura mai precis problema, că în fiece punct $A_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ vectorii $\bar{v}_{ik}$ se înlocuesc prin suma lor $\bar{v}_i$:

$$\bar{v}_i=\sum_{k}\bar{v}_{ik}.$$

Sistemul $(\bar{v})$ depinde de $5n$ parametri scalari. Torsorul T înseamnă 6 condiţiuni scalare între cei $5n$ parametri, dacă n este >1. Gradul de nedeterminare al problemei este dat deci de diferenţa $5n-6$.

În cazul particular $n=2$ dispunem de patru scalari, adică avem ∞^4 sisteme de doi vectori, echivalente între ele. Am putea dispune de cei patru scalari pentru a ne fixa în mod arbitrar suportul unuia dintre vectori, deoarece suportul depinde de

patru parametri scalari. Prin urmare, la un torsor dat corespunde *totdeauna* un sistem de doi vectori, suportul unuia dintre ei putând fi ales arbitrar. Se înţelege însă că pentru ca şi suportul celui de al doilea vector să poată fi ales arbitrar e nevoe de încă patru *condiţii* scalare: problema găsirii a doi vectori glisanţi pe suporturi date este deci posibilă numai cu împlinirea a patru condiţii scalare [1].

Aşa dar, în cazul $n=2$ dispunem de patru scalari cu ajutorul cărora problema poate satisface patru condiţiuni scalare. *In genere.* Se întâmplă totuşi şi cazuri de incompatibilitate. Spre pildă, să ne propunem a determina doi vectori glisanţi $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$ având direcţii date prin versorii cunoscuţi $\overline{u_1}$ şi $\overline{u_2}$, torsorul lor în O fiind alcătuit din vectorii daţi $\overline{R}$ şi $\overline{M_0}$. Însemnând cu $\overline{u_i}$, $\overline{m_i}$ torsorul în O al versorului $\overline{u_i}$ $(i=1,2)$ şi cu v_1, v_2 valorile scalare ale vectorilor $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ respectiv, vom avea:

$$\overline{R} = v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2}, \tag{1}$$

$$\overline{M_0} = v_1\overline{m_1} + v_2\overline{m_2}. \tag{2}$$

Necunoscutele sunt $v_1, v_2, \overline{m_1}, \overline{m_2}$, adică 8 scalari, pentru determinarea cărora avem cele 6 ecuaţii (1) şi (2); pe lângă acestea trebue să mai adăogăm încă două

$$\overline{u_1}\,\overline{m_1} = \overline{u_2}\,\overline{m_2} = 0. \tag{3}$$

Problema pare a fi perfect determinată. Observăm însă că ecuaţia (1) reprezintă *trei* ecuaţii scalare pentru cele *două* necunoscute v_1 şi v_2. Rezultă că va fi imposibil să găsim două numere v_1 şi v_2 care să le satisfacă pe toate trei, afară de cazul când sistemul (1) este compatibil, şi anume când vectorii $\overline{R}, \overline{u_1}, \overline{u_2}$ sunt coplanari. Prin urmare, o condiţie de existenţă a soluţiei este ca $\overline{R}$ să fie în planul determinat de direcţiile vectorilor $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ceea ce era evident a priori, întru cât $\overline{R}$ este suma vectorilor $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$. Pentru determinarea vectorilor $\overline{m_1}$ şi $\overline{m_2}$ avem apoi ecuaţia (2) şi ecuaţiile (3), adică cinci ecuaţii scalare pentru şease necunoscute. Ne rămâne un parametru arbitrar. În adevăr, dacă $\overline{m_1}$, $\overline{m_2}$ sunt soluţii ale ecuaţiilor (2) şi (3) atunci $\overline{m_1'}$, $\overline{m_2'}$ daţi de relaţiile

$$\overline{m_1'} = \overline{m_1} + \lambda\,\overline{v_2}(\overline{u_1}\times\overline{u_2}),$$

$$\overline{m_2'} = \overline{m_2} + \lambda\,\overline{v_1}(\overline{u_2}\times\overline{u_1})$$

vor fi soluţii ale aceluiaşi sistem, λ fiind un parametru arbitrar scalar. Ele reprezintă forma cea mai generală a soluţiilor sistemului şi se obţin din soluţia $\overline{m_1}$, $\overline{m_2}$ printr'o translaţie a vectorilor $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$ egală cu $\lambda\overline{R}$.

În concluzie putem spune că *problema aflării a doi vectori glisanţi de torsor dat* $\overline{R}$, $\overline{M}$, *în* O *şi de direcţii date nu este posibilă de cât dacă direcţiile date sunt coplanare cu* $\overline{R}$ [2]*; în acest din urmă caz există* ∞^1 *soluţii deduse din una oarecare prin translaţii paralele la* $\overline{R}$.

Nomenclatura. Numele de „torsor" l'am primit de la geometrul englez *Rouse Ball* care în cunoscuta sa operă „Theory of screws" introduce două noţiuni corespunzând torsorului: „wrech" şi „twist". *Paul Appell* le traduce prin „torseur" în Mecanica sa, un cuvânt de sonoritate internaţională. Este drept că „torseur"-ul lui *Appell* este puţin diferit de „torsorul" nostru: este ceeace noi numim „forma minimală a torsorului" adică valoarea sa specială într'un punct oarecare ale axei centrale. Însă Mecanica lucrează mai mult cu forma generală a torsorului, în cât am preferat să o desemnăm pe aceasta cu numele de „torsor". [3]

[1]) D. *Ghermănescu* găseşte, în articolul citat, (cazul *b.*, p. 2) că e nevoie numai de *două* condiţii scalare pentruca problema să poseadă o soluţie, anume condiţia ca axa centrală legată de torsorul dat să întâlnească perpendiculara comună a suporturilor sub un unghiu drept. Această afirmare neexactă provine dintr'o greşită identificare a cazului *b*, cu cazul când s'ar da capetele perpendicularei comune celor două suporturi (cazul *a*). Cazul *b* fixează, în plus faţă de cazul *a*, direcţiile vectorilor $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$, adică încă două condiţii. Cei doi vectori $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ determinaţi de relaţiile (α) din articolul citat în genere *nu* vor avea direcţiile suporturilor date a priori.

[2]) Afirmaţia d-lui *Ghermănescu*, relativ la ceea ce numeşte D-sa cazul *c* (loc. cit. p. 2) că vectorul $\overline{R}$ se descompune după direcţiile date în două componente este, evident, eronată: vectorul $\overline{R}$ nu se poate descompune după direcţiile date de cât dacă, după cum am văzut, vectorul $\overline{R}$ şi versorii celor două direcţii sunt coplanari.

[3]) D-l *Ghermănescu* numeşte „torsor" un sistem de vectori (v. p. 1 loc. cit) Socot că nici măcar, „un sistem de vectori glisanţi" (cum şi sunt de altfel vectorii d-lui *Ghermănescu*) nu ar merita un nume special, fiind vorba de ceva prea vag. Aceiaşi obiecţie se poate face şi relativ la numele de „diadă" pe care-l dă D-sa sistemului de doi vectori glisanţi, cu atât mai mult cu cât numele de „diadă" a intrat adânc în literatura ştiinţifică, de la *Gibbs* încoace, fiind consacrată unei noţiuni cu totul diferită. Este vorba de un operator tensorial care poate fi reprezentat prin *doi* vectori sau mai general prin *două* şiruri de vectori (v. s. ex. *Lagally*, Vorl. üb. Vektorrechnung, Leipzig 1928).

REDUCEREA TORSORILOR LA DIADE

DE

M. GHERMĂNESCU.

D-l *V. Vâlcovici* mi-a exprimat verbal observaţiile D-sale relative la articolul meu dela pag. 1—3, pe care nu ştiam că le va da publicităţii, mai ales după explicaţiile mele şi mai ales în urma faptului că nu-mi ceruse să public *eu* o rectificare Deaceia, voi răspunde, pe scurt, şi aci.

D-sa are dreptate în ceace priveşte forma în care sunt redactate cazurile *b* şi *c*, redactare cam grăbită, o recunosc: condiţia dată la cazul *b* este necesară dar nu suficientă, iar la cazul *c* lipseşte condiţia ca vectorul $\overline{R}_T$ să se poată descompune după două direcţii date. Ceva mai mult, cazul *c* este greşit redus la *a,* aşa că îi voi da o soluţie directă, mai jos.

Cine citeşte însă *întreg* articolul meu, vede uşor că aci sunt numai omisiuni involuntare în redactare, căci condiţiile generale de posibilitate ale oricărei probleme de reducere, sunt precis enunţate în prima parte a articolului meu. În adevăr, aceste condiţii sunt date sub forma a două relaţii *vectoriale* (nu scalare), scrise apoi sub forma (α), care se pot desface în şase ecuaţii scalare. Eliminarea datelor necunoscute între aceste şase ecuaţii scalare duce la relaţiile de condiţie între datele problemei, cu care orice problemă se poate deci complect trata.

Din aceste condiţii, rezultă câteva proprietăţi, care apar ca condiţii necesare în orice problemă de reducere, interesante prin forma lor geometrică şi care mi-au solicitat atenţia în mod deosebit. Astfel, am scris textual, la pag. 2: „*Perpendiculara comună a două drepte reciproce întâlneşte axa şi este perpendiculară pe ea*“ [exprimată parţial şi de (γ)], iar mai jos „*Dreptele* D_1 *şi* D_2 *sunt deci situate în plane perpendiculare pe planul* P“. Această condiţie include în ea pe aceia (care rezultă imediat, de altfel) ca direcţiile vectorilor $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ să fie în acelaş plan cu $\overline{R}_T$, adică, condiţia ca $\overline{R}_T$ să se descompună după două direcţii date. Dealtfel, am scris încă, textual, la pag. 3: „... *la fiecare caz de descompunere a unui vector în două componente corespunde un caz de reducere a unui torsor la o diadă*“ etc.

Prin urmare, din condiţiile generale ale articolului meu, se vede clar că lipsurile semnalate la cazurile *b* şi *c* sunt datorite unei simple inadvertenţe locale, o grabă în redactare, ceace era deci uşor de observat şi, în atare condiţii, inutil de relevat în forma în care s'a făcut.

Pentru cazul *c,* iată o soluţie directă, dedusă din ecuaţiile vectoriale ce preced pe (α): luăm planul P ca plan zOx, axa torsorului ca axă Oz, apoi notăm cu V_1, V_2 mărimile vectorilor $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, cu $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ cosinusurile direcţiilor acestora; ei fiind paraleli la zOy şi având rezultanta $\overline{R}_T = Z\,\overline{z}$ pe Oz, avem

$$\alpha_1=\alpha_2=0,\quad V_1\beta_1+V_2\beta_2=0,\quad V_1\gamma_1+V_2\gamma_2=Z.$$

Fie, deasemeni, $O_1(x_1, O, z_1)$, $O_2(x_2, O, z_1)$: a doua ecuaţie vectorială din articolul meu se desface în

$$z_1(V_1\beta_1+V_2\beta_2)=0,$$

$$V_1\gamma_1x_1+V_2\gamma_2x_2=0,\quad V_1\beta_1x_1+V_2\beta_2x_2=N,$$

unde N este mărimea lui $\overline{M}_0(T)$, situat pe Oz. Prima ecuaţie este satisfăcută oricare ar fi z_1, celelalte dau pe x_1, x_2, deci diada poate fi deplasată, printr'o translaţie, dealungul axei Oz.

În ceeace priveşte obiecţiile D-lui *Vâlcovici* relative la denumiri, sunt şi eu de părere că o uniformizare a acestora este bine venită. Insă, atâta timp cât un sistem de vectori îl folosesc sub forma redusă de *torsor*, îi pot menţine această denumire, pentru economie de exprimare. Faptul că prin diadă se denumeşte un anumit operator tensorial nu împiedică de a se folosi această denumire, în *Calculul vectorial,* pentru un sistem de doi vectori alunecători. De altfel, această denumire nu-mi aparţine, iar eu o găsesc comodă.

La rândul meu, nu mă împac cu neologismul *glisant*, când avem românescul *alunecător*, iar vectorii de care se vorbeşte la începutul articolului D-sale sunt cunoscuţi în literatură ca vectori *liberi.*

Acei care doresc să cunoască noţiunile elementare de *Algebră vectorială* le pot găsi şi în *Cursul* meu dela Politehnică (v. Ed. II).

NOTE MATEMATICE

8. — *Formes linéaires des nombres dont le bicarré se termine dans le système décimal par un nombre donné de 4 chiffres.*

Ce travail fait suite à celui que nous avons publié dans R. M. T., où le nombre terminal a 1, 2 ou 3 chiffres.

Les nombres terminaux de 4 chiffres des bicarrés consécutifs forme un période 1251 nombres symétrique par rapport à la tranche terminale de 4 chiffres du bicarré de 625 ou de 1250.

Le nombre des tranches terminales *distinctes* de 4 chiffres des bicarrés est de 252. On le trouve par les mêmes considérations que celles qui ont été développées dans notre article précédent.

Théorème. Si la tranche terminale de 4 chiffres d'un bicarré dans le système décimal n'est pas 0000 ou 0625, il existe 32 nombres inférieurs à 10.000 dont le bicarré se termine par cette même tranche.

Tous les nombres qui ont cette propriété sont donnés par les expressions $1250\,n \pm a$, $1250\,n \pm b$. a et b étant tous les deux inférieurs à 625.

Les bicarrés de tous les M 10 sont terminés par 0000, de tous les M impairs de 5 par 0625. Il y a donc 1000 nombres inférieurs à 10.000 dont le bicarré se termine par 0000 (0 étant compté aussi) et 1000 nombres inférieurs à 10.000 dont le bicarré se termine par 0625.

La table ci-après donne, outre les tranches terminales distinctes des bicarrés rangées par ordre de grandeur croissante (exception faite pour 0625), en regard de chaque tranche les 2 plus petits nombres dont le bicarré se termine par la tranche correspondante.

Table des formes linéaires des nombres dont le bicarré se termine dans le système décimal par un nombre donné de 4 chiffres

m c d u	N
0001	$10\,n$
0625	$10\,n+5$

m c d u	*a*	*b*	*m c d u*	*a*	*b*
0001	1	443	2641	377	489
0016	2	364	2656	222	404
0081	3	79	2721	331	383
0096	456	492	2736	238	434
0161	391	537	2801	543	549
0176	332	424	2816	402	586
0241	323	589	2881	129	353
0256	4	522	2896	594	608
0321	19	333	2961	63	409
0336	284	438	2976	232	276
0401	101	257	3041	77	361
0416	298	486	3056	54	172
0481	53	271	3121	181	183
0496	306	558	3136	166	212
0561	259	263	3201	157	449
0576	218	324	3216	102	186
0641	261	623	3281	221	403
0656	346	472	3296	408	506
0721	133	169	3361	191	387
0736	12	316	3376	318	376
0801	201	293	3441	39	223
0816	86	598	3456	122	296
0881	103	621	3521	17	31
0896	156	358	3536	484	588
0961	187	341	3601	349	393
0976	224	482	3616	198	214
1041	139	327	3681	453	571
1056	422	554	3696	208	356
1121	67	319	3761	413	459
1136	334	462	3776	382	476
1201	301	407	3841	349	523
1216	314	352	3856	72	604
1281	153	279	3921	119	217
1296	6	158	3936	116	138
1361	309	613	4001	249	307
1376	68	124	4016	498	614
1441	27	539	4081	329	503
1456	204	372	4096	8	206
1521	267	469	4161	37	141
1536	266	338	4176	168	576
1601	143	401	4241	411	427
1616	52	536	4256	22	254
1681	71	203	4321	269	417
1696	42	144	4336	312	534
1761	163	291	4401	149	243
1776	24	618	4416	236	452
1841	273	311	4481	21	553
1856	146	322	4496	56	192
1921	467	619	4561	487	509
1936	112	384	4576	532	574
2001	501	557	4641	11	127
2016	136	248	4656	28	96
2081	253	421	4721	419	617
2096	242	294	4736	66	488
2161	287	359	4801	49	457
2176	76	82	4816	152	164
2241	89	573	4881	371	603
2256	272	496	4896	94	392
2321	481	583	4961	91	313
2336	216	562	4976	18	474
2401	7	601	5041	173	389
2416	264	548	5056	78	446
2481	303	479	5121	433	569
2496	442	444	5136	38	584
2561	241	513	5201	51	93
2576	176	468	5216	148	564

m c d u	*a*	*b*	*m c d u*	*a*	*b*
5281	529	597	7616	464	552
5296	244	592	7681	297	321
5361	137	559	7696	10	542
5376	374	568	7761	337	541
5441	461	473	7776	118	226
5456	128	454	7841	227	561
5521	233	531	7856	396	428
5536	16	412	7921	283	369
5601	151	607	7936	134	612
5616	286	448	8001	193	499
5681	179	547	8016	252	386
5696	394	458	8081	247	579
5761	41	587	8096	44	508
5776	132	274	8161	109	463
5841	61	477	8176	326	582
5856	104	178	8241	73	161
5921	33	381	8256	478	504
5936	388	616	8321	83	519
6001	57	251	8336	188	466
6016	114	502	8401	399	507
6081	171	497	8416	14	48
6096	258	544	8481	197	229
6161	213	609	8496	194	308
6176	174	418	8561	13	491
6241	177	339	8576	32	426
6256	228	246	8641	239	373
6321	167	231	8656	154	528
6336	34	62	8721	117	581
6401	351	493	8736	184	262
6416	202	514	8801	43	299
6481	447	521	8816	348	414
6496	58	556	8881	121	147
6561	9	237	8896	108	344
6576	74	282	8961	159	437
6641	123	511	8976	518	526
6656	278	596	9041	577	611
6721	81	367	9056	196	578
6736	512	566	9121	317	431
6801	207	451	9136	416	538
6816	98	336	9201	199	593
6881	379	397	9216	436	602
6896	142	406	9281	97	471
6911	563	591	9296	92	494
6976	26	268	9361	363	441
7041	111	423	9376	182	624
7056	304	328	9441	211	277
7121	69	567	9456	546	622
7136	84	288	9521	281	517
7201	343	551	9536	88	234
7216	64	398	9601	99	107
7281	29	347	9616	36	302
7296	256	342	9681	47	429
7361	59	113	9696	292	606
7376	126	432	9761	87	209
7461	289	527	9776	368	524
7456	46	378	9841	23	189
7521	219	483	9856	354	572
7536	162	516	9921	131	533
7601	357	599	9936	362	366

9. — *Asupra unei probleme de geometrie analitică.*

Îmi propun să mă ocup de următoarea problemă de geometrie în spaţiu:

Locul centrelor cuadricelor conjugate cu un tetraedru dat şi cari trec printr'un punct dat.

Luăm punctul dat, ca origină a trei axe perpendiculare şi fie

$$P \equiv A_1x + B_1y + C_1z - 1 = 0,$$

$$Q \equiv A_2x + B_2y + C_2z - 1 = 0,$$

$$R \equiv A_3x + B_3y + C_3z - 1 = 0,$$

$$S \equiv A_4x + B_4y + C_4z - 1 = 0,$$

ecuaţiile celor 4 feţe ale tetraedrului dat.

Ecuaţia cuadricei este

$$(1) \qquad \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + \delta S^2 = 0.$$

Scriind că cuadrica trece prin punctul dat, care e chiar origina axelor, găsim

$$(2) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Însemnând cu $f(x, y, z)$ primul membru al ecuaţiei (1), ecuaţiile centrului cuadricei (1) sunt:

$$(3) \qquad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0.$$

Să calculăm, de pildă, pe prima:

$$f'_x = 2\alpha A_1P + 2\beta A_2Q + 2\gamma A_2R + 2\delta A_4S.$$

În mod analog se scriu şi celelalte. Scriind ecuaţiile centrului şi alăturând condiţia (2), căpătăm egalităţile următoare:

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha A_1P + \beta A_2Q + \gamma A_3R + \delta A_4S = 0 \\ \alpha B_1P + \beta B_2Q + \gamma B_3R + \delta B_4S = 0 \\ \alpha C_1P + \beta C_2Q + \gamma C_3R + \delta C_4S = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \end{cases}$$

Pentru a găsi locul centrului cuadricei (1), va trebui să eliminăm parametrii $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ între ecuaţiile (4). Rezultă egalitatea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_1P & A_2Q & A_3R & A_4S \\ B_1P & B_2Q & B_3R & B_4S \\ C_1P & C_2Q & C_3R & C_4S \end{vmatrix} = 0.$$

Mai putem scrie această ecuaţie:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{P} & \frac{1}{Q} & \frac{1}{R} & \frac{1}{S} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{(A_2 B_3 C_4)}{P} - \frac{(A_1 B_3 C_4)}{Q} + \frac{(A_1 B_2 C_4)}{R} - \frac{(A_1 B_2 C_3)}{S} = 0.$$

(5) $$(A_2 B_3 C_4) Q R S - (A_1 B_3 C_4) P R S + (A_1 B_2 C_4) P Q S - (A_1 B_2 C_3) P Q R = 0,$$

unde o notație de forma $(A_2 B_3 C_4)$, reprezintă un determinant în care s'au notat numai termenii din diagonala principală (notația lui *Salmon*). Ecuația (5) este de forma:

(6) $$aQRS + bPRS + cPQS + dPQR = 0.$$

Se vede ușor că ecuația (5) reprezintă o suprafață care trece prin cele 6 muchii ale tetraedrului dat, deci trece și prin cele 4 vârfuri ale aceluiași tetraedru. Așa dar, locul căutat este o suprafață cubică tetranodală relativă la tetraedrul dat.

28 Aprilie 1932,

VIRGIL CLAUDIAN
PROFESOR SECUNDAR BARLAD

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, Nr. 9, Mai 1945.

O scrisoare dela D-l *Tancred Constanttnescu*. Relații matematice în studiul răsturnării brazdei de către plug, de *Radu Bădescu* și *Florea Bărbulescu*. Premiul „Ing. *H. Capriel*, de Prof. *D Babelian*, Prof. *Al. Pantazi*, Prof. *P. Sergescu*". Raport pentru acordarea premiului de Algebră (*A. G. Ioachimescu*), de *V Alaci*, *Th. Angheluță*, *Al. Bunescu*. Note matematice, Chestiuni de examen, Probleme propuse și rezolvate.

2. *Știință și Progres*, Anul X, Nr. 6—7 Aprilie—Mai 1945. Asupra unui proect de calendar universal, de *C. Menciu*. Sensul analogiei în Fizică, de *P. Pogângeanu*. Probleme rezolvate și propuse.

3. *Ioan V. Mătieș*. Contribuții la rezolvarea congruențelor de gradul *n* și ordinul *p*. Cuburi isofinale. (Extras din „R. M. T" vol. XXIV pag. 1—5, 87—92, 99—106),

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2010. — *De vacanța Crăciunului a plecat spre Brăila un număr de studenți dela Politehnica Timișoara, formând patru grupe, astfel că numărul studenților din aceste grupe să crească în progresie geometrică, prima grupă având doi studenți. Să presupunem că au plecat cu acceleratul și că n'aveau toți carnete de militari, astfel că unii au plătit mai mult decât alții. Prețul unui bilet s'a fixat astfel: un student dintr'o grupă plătește de un anumit număr de ori mai mult decât un student din grupa precedentă.*

Știind că un student din grupa întâia a plătit un bilet cu 840 lei, iar banii strânși numai dela ultima grupă sunt 45360 lei și că raportul dintre suma dată de grupa doua și numărul tuturor studenților este 168, se cere:

1°. *Numărul studenților în total și din fiecare grupă în parte.*

2°. *Suma stânsă de pe biletele vândute tuturor studenților.*

3°. *De câte ori a costat mai mult un bilet al unui student dintr'o grupă, față de costul unui bilet al unui student din grupa precedentă.*

AL ȚIGANOIU

Soluție. Conform enunțului, dacă I, II, III, IV sunt cele patru grupe, atunci numărul studenților din aceste grupe sunt 4 numere în progresie geometrică, tot astfel și prețurile câte unui bilet al grupelor corespunzătoare, mai precis

grupele	I	II	III	IV
numărul studenților	2	$2q$	$2q^2$	$2q^3$
prețul unui bilet	840	$840p$	$840p^2$	$840p^3$

În grupa IV sunt deci $2q^3$ și fiecare plătește $840p^3$, deci conform enunțului, avem

$$2q^3 . 840 p^3 = 45360,$$

sau

$$p^3 q^3 = 27.$$

De aci deducem, luând evident numai soluția reală,

(1) $$pq = 3.$$

Mai departe, observăm că grupa II, are $2q$ studenți și plătesc fiecare $840p$, iar numărul total al studenților este $2(1+q+q^2+q^3)$, astfel că tot conform enunțului, avem încă

$$\frac{2q\cdot 840p}{2(1+q+q^2+q^3)}=168$$

și ținând seamă de (1), simplificând, găsim

$$1+q+q^2+q^3=15.$$

Această ecuație putându-se scri

$$(q-2)(q^2+3q+7)=0,$$

are singura soluție reală $q=2$, care convine problemei și atunci din (1), deducem $p=\frac{3}{2}$.

Acum putem răspunde pe rând la întrebările din problemă:

1° Numărul total al studenților a fost

$$2(1+q+q^2+q^3)=2(1+2+4+8)=30,$$

iar numărul studenților pe grupe a fost respectiv 2, 4, 8, 16.

2° Suma S de lei strânsă pentru toate biletele a fost,

$$S=2\times 840+4\cdot\frac{3}{2}\cdot 840+8\cdot\frac{9}{4}\cdot 840+16\cdot\frac{27}{8}840=$$

$$2\times 840(1+3+9+16)=840\times 80=67200 \text{ Lei.}$$

3° Un bilet al unui student dintr'o grupă a costat $\frac{3}{2}=1{,}5$ ori mai mult decât prețul unui bilet pentru un student din grupa precedentă

Soluții date de d-ra *Tarța Valeria* (Polit., Timișoara), și de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Barbu I. Popescu* (Lic. Milit. Timișoara), *Birănaș Ioan* (Arad), *Bolcaș V.* (Lic. Beiuș), *Constantinescu Ilie* (Lic. Bălcescu), *Costea Florian* (Lic. Beiuș), *Enache Ion* (Lt), *Filimon Ion* (Lic. Milit., Timișoara), *Ghetea Traian* (Lic. Făgăraș). *Giurconiu Mihail* (Polit., Timișoara), *Godea I.* (Polit. Timișoara), *London Emeric* (Polit., Timișoara), *Maliță Mircea* (Lic Beiuș), *Munteanu Lucian* (Polit., Timișoara), *Miclea Nicolae* (Polit., Timișoara), *Petruescu Viorel* (student), *Plângu Ion* (Lic. Tulcea), *Simcso Carol* (Polit, Timișoara), *Stanciu Petru* (Timișoara), *Teodorescu Alexandru* (Lic Milit., Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga Timișoara), *Tutor Aurel* (Lic Făgăraș), *Vrânceanu Gh.* (Lic. Milit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2232. — *Să se arate că într'un triunghiu în care notațiile sunt cele obicinuite, avem*

$$\sum r_c r_b(r_c+r_b)\operatorname{cotg}^2\frac{B+C}{2}\cos(B-C)=$$

$$\sum\frac{p^2 b\sin 2A\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{(1+\cos B)\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}.$$

C-TIN TINCU

Soluție. Notând cu E, primul membru al identității cerute și având în vedere relațiile cunoscute

$$r_c=\frac{s}{p-c},\quad r_b=\frac{s}{p-b},\quad \operatorname{cotg}\frac{B+C}{2}=$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad s^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

putem scri succesiv

$$E_1=\sum\frac{s^2}{(p-b)(p-c)}\left(\frac{s}{p-c}+\frac{s}{p-b}\right)\cdot\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\cos(B-C)=$$

$$\sum\frac{s^3(2p-b-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\cos(B-C),$$

deci

$$E_1=\sum a\cos(B-C). \tag{1}$$

Notând încă cu E_2 al 2-lea membru al identității din enunț și având în vedere relațiile cunoscute

$$1+\cos B=2\cos^2\frac{B}{2},\quad \sin 2A=2\sin A\cos A,$$

$$p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=s,\quad \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

putem scrie succesiv

$$E_2=\sum\frac{p^2 b\sin A\cos A\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}=$$

$$\sum\frac{b\sin A\cos A\,p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=$$

$$s\sum\frac{b\sin A\cos A}{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}}=s\sum\frac{2b\sin A\cos A}{\sin B}.$$

Cum $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$, mai putem scri

$$E_2=s\sum 2a\cos A= \tag{2}$$

$$s[(a\cos A+b\cos B)+(b\cos B+c\cos C)+(c\cos C+c\cos A)]=$$

$$s\sum(b\cos B+c\cos C).$$

Cum din teorema sinusurilor deducem

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

relaţia (2) devine

$$E_2=s\sum\frac{a(\sin B\cos B+\sin C\cos C)}{\sin A}=$$

$$s\sum\frac{\sin 2B+\sin 2C}{2\sin A}=s\sum\frac{\sin(B+C)\cos(B-C)}{\sin A}.$$

Dar fiindcă $\sin(B+C)=\sin A$, urmează că

(3) $$E_2=s\sum a\cos(B-C).$$

Din relaţiile (1) şi (3), rezultă

$$E_1=E_2,$$

astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluţii bune date de d-nii: *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Filimon Ioan* (Lic. Militar Timişoara), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Mazilu M.*, *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Făgăraş).

Problema 2244. — *Să se determine α şi să se rezolve ecuaţia*

$$x^4-10x^3+35x^2+\alpha x+24=0$$

ştiind că între rădăcini există relaţia

$$2(x_1x_2+x_3x_4+1)=(x_1+x_2)(x_3+x_4).$$

I. C. BALAN

Soluţie. Relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei date sunt

(1) $$x_1+x_2+x_3+x_4=10,$$

(2) $$(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=35,$$

(3) $$(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2=-\alpha,$$

(4) $$x_1x_2x_3x_4=24,$$

la care alăturăm şi relaţia dată

(5) $$2(x_1x_2+x_3x_4+1)=(x_1+x_2)(x_3+x_4).$$

Relaţia (2) în virtutea relaţiei (5) devine

$$2(x_1x_2+x_3x_4+1)+x_1x_2+x_3x_4=35,$$

sau

$$3(x_1x_2+x_3x_4)=33,\quad\text{deci}\quad x_1x_2+x_3x_4=11.$$

Dacă alăturăm acestei relaţii aceea din (4), avem

$$\begin{cases}x_1x_2+x_3x_4=11\\ x_1x_2\,.\,x_3x_4=24.\end{cases}$$

De aci rezultă că x_1x_2, x_3x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2-11z+24=0,$$

de unde

$$z=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{2},$$

deci

(6) $$\begin{cases}x_1x_2=3\\ x_3x_4=8,\end{cases}\quad\text{sau}\quad(7)\quad\begin{cases}x_1x_2=8\\ x_3x_4=3.\end{cases}$$

De altă parte, fiindcă am găsit $x_1x_2+x_3x_4=11$, relaţia (2) devine

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=24,$$

la care alăturând relaţia (1), avem

$$\begin{cases}(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=10\\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)=24.\end{cases}$$

De aci rezultă că x_1+x_2, x_3+x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2-10z+24=0,$$

de unde

$$z=5\pm\sqrt{25-24},$$

deci

(8) $$\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_3+x_4=4,\end{cases}\quad\text{sau}\quad(9)\quad\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_3+x_4=6.\end{cases}$$

Din (6), (7), (8) şi (9) obţinem următoarele sisteme de ecuaţii, care dau rădăcinile ecuaţiei propuse

(10) $$\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1x_2=3\end{cases}\quad\text{şi}\quad\begin{cases}x_3+x_4=4\\ x_3x_4=8\end{cases};$$

(11) $$\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=3\end{cases}\quad\text{şi}\quad\begin{cases}x_3+x_4=6\\ x_3x_4=8\end{cases};$$

(12) $$\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1x_2=8\end{cases}\quad\text{şi}\quad\begin{cases}x_3+x_4=4\\ x_3x_4=3\end{cases};$$

(13) $$\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=8\end{cases}\quad\text{şi}\quad\begin{cases}x_3+x_4=6\\ x_3x_4=3.\end{cases}$$

De aci deducem că x_1 x_2 şi x_3, x_4 sunt, respectiv, rădăcinile ecuaţiilor

(10′) $$\begin{cases}z^2-6z+3=0\\ u^2-4u+8=0,\end{cases}\text{deci}\begin{cases}x_1,x_2=3\pm\sqrt{6}\\ u_1,u_2=2(1\pm i)\end{cases},\ (i=\sqrt{-1})$$

(11′) $$\begin{cases}z^2-4z+3=0\\ u^2-6u+8=0,\end{cases}\text{deci}\begin{cases}x_1,x_2=2\pm1\\ u_1,u_2=3\pm1\end{cases}$$

(12′) $$\begin{cases}z^2-6z+8=0\\ u^2-4u+3=0,\end{cases}\text{deci}\begin{cases}x_1,x_2=3\pm1\\ u_1,u_2=2\pm1\end{cases}$$

(13′) $\begin{cases} z^2-4z+8=0 \\ u^2-6u+3=0, \end{cases}$ deci $\begin{cases} x_1,x_2=2(1\pm i) \\ x_3,x_4=3\pm\sqrt{6}, \end{cases}$ $(i=\sqrt{-1})$.

Rezultă astfel că rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, într'o ordine oricare, sunt

(14) $3+\sqrt{6},\ 3-\sqrt{6},\ 2(1+i),\ 2(1-i)$,

sau

(15) 3, 1, 4, 2.

Rămâne a determina pe α. Valoarea lui α o deducem din relaţia (3) înlocuind x_1, x_2, x_3, x_4 prin valorile luate, de exemplu, în ordinea din şirul (14), sau (15), obţinem respectiv

$\alpha=-(6.8+4.3)=-60$, sau $\alpha=-(4.8+6.3)=-50$.

Soluţii date de d-rele *Denes R. Mariana* (Polit, Timişoara), *Măran Ana* (Polit., Timişoara), *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Barbu A. Ioan* (Lic. Caracal), *Brasch Andrei* (Polit, Timişoara), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Enache Ion* (Lt), *Gottard Francisc* (Polit, Timişoara), *Ionescu Petre* (student, Bucureşti), *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Mazilu M.*, *Miclea Nicolae* (Polit, Timişoara), *Munteanu Lucian* (Polit,, Timişoara), *Nedelcu Ulpius* (Lic. Milit, Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Serdeleanu Gh.* (Polit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Stanciu A. Petre* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş), *Ţigănoiu Al.* (Polit. Timişoara), *Vasiliu I.* (R. Vâlcea), şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2256. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{1+\cos^2 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

MARCEL AMARASTEANU

Soluţie. Ţinând seamă că

$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

membrul al 2-lea al ecuaţiei se poate scri succesiv

$$\operatorname{tg}^2 x\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}x}\right)=\operatorname{tg}^2 x\left[\operatorname{tg}^2 x\frac{x}{2}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\operatorname{tg}^2 x\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=\operatorname{tg}^2 x,$$

astfel că ecuaţia dată devine

(1) $$\frac{1+\cos^2 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg}^2 x.$$

Cum, $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, ecuaţia (1) devine

$$\frac{1+\cos^2 2x}{2\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

de unde deducem

(2) $$1+\cos^2 2x=2\sin^2 x=1-\cos 2x$$

şi

(3) $$\cos^2 x=0,$$

deci

(2′) $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ şi (2″) $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$,

unde $(k=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$.

Rădăcinile (2″) satisfac şi ecuaţia (3).

Soluţii date de d-nii: *Barbu Ion* (Caracal), *Birănaş Ioan* (Arad), *Brasch Andrei* (Polit, Timişoara), *Chesaru Cristea* (Polit, Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Costea Floricel* (Lic. Beiuş) *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timişoara), *Gligor Ioan* (student Timişoara), *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Mazilu M.*, *Miclea Nicolae* (Polit, Timişoara), *Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2264. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare* ABC, *în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţia*

$$p+b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}=$$

$$2\left(b\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{4}+c\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}\right).$$

V. ALACI

Soluţie. Notând cu E membrul al 2-lea al relaţiei cerute şi ţinând seamă de formulele cunoscute

$$2\cos^2\frac{C}{4}=1+\cos\frac{C}{2},\quad 2\cos^2\frac{B}{2}=1+\cos\frac{B}{2},$$

avem succesiv

(1) $$E=b\cos\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)+c\cos\frac{B}{2}\left(1+\cos\frac{B}{2}\right)=$$

$$b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{B}{2}=$$

$$b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}+b\frac{1+\cos C}{2}+c\frac{1+\cos B}{2}=$$

$$b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}+\frac{b+c+b\cos C+c\cos B}{2}.$$

Cum avem cunoscut

$$b\cos C + c\cos B = a \qquad a+b+c=2p,$$

relaţia (1) devine

$$E = p + b\cos\frac{C}{2} + c\cos\frac{B}{2},$$

astfel că identitatea din enunţ este stabilită

Soluţii date de d-nii: *Avram Cristache* (Lic Brăila), *Barbu Ion*, *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Brasch Andrei* (Polit, Timişoara), *Braşoveanu Gheorghe* (Craiova), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara) *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Costea Florin* (Lic. Beiuş), *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Grigore A. Gheorghe*, *Grigor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Ionescu Petre*, *Mazilu M. Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Serdeleanu Gh.* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara) *Stroescu Florea*, *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

Generalizare. D-l *London Emeric* (Polit., Timişoara), folosind succesiv metoda de mai sus, a stabilit următoarea identitate mai generală:

$$(2)\quad p+\left(b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}\right)+2\left(b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{4}+c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\right)+2^2\left(b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{4}\cos\frac{C}{8}+c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{B}{8}\right)+\cdots+2^{n-1}\left(b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{4}\cdots\cos\frac{C}{2^{n-1}}+c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cdots\cos\frac{B}{2^{n-1}}\right)=$$
$$2^{n-1}\left(b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{4}\cdots\cos\frac{C}{2^{n-1}}\cos^2\frac{C}{2^n}+c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cdots\cos\frac{B}{2^{n-1}}\cos^2\frac{B}{2^n}\right).$$

Soluţia autorului. Considerăm un triunghiu oare care ABC şi prelungind pe CB şi BC, respectiv, cu $BB_1=c$, $CC_1=b$, se formează un triunghiu $A_1B_1C_1$ (A_1 fiind în A), având elementele următoare:

$$A_1 = A + \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2}+\frac{A}{2},\quad B_1=\frac{B}{2},\quad C_1=\frac{C}{2},$$

$$a_1=2p,\quad b_1=\frac{b\sin C}{\sin\frac{C}{2}}=2b\cos\frac{C}{2},\quad c_1=2c\cos\frac{B}{2}.$$

Procedând la fel cu triunghiul $A_1B_1C_1$, obţinem un triunghiu $A_2B_2C_2$ (A_2 fiind în A), având elementele următoare:

$$(3)\quad a_2=a_1+b_1+c_1=2\left(p+b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}\right),$$

$$b_2=2b_1\cos\frac{C_1}{2}=4b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{4},$$

$$c_2=4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4},\quad A_2=\frac{\pi}{2}+\frac{A_1}{2}=\frac{3\pi}{4}+\frac{A}{4},$$

$$B_2=\frac{B}{4},\quad C_2=\frac{C}{4}.$$

Acum în triunghiu $A_2B_2C_2$, avem relaţia cunoscută

$$a_2=b_2\cos C_2+c_2\cos B_2,$$

unde ţinând seamă de relaţiile (3) şi simplificând prin 2, obţinem

$$p+b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}$$
$$=2\left(b\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{4}+c\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{B}{2}\right),$$

adică tocmai identitatea cerută.

Generalizare. Dacă, analog ca mai sus, formăm triunghiurile $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, ..., $A_nB_nC_n$, ajungem să stabilim identitatea generală (2), dată de D-l *London Emeric*.

Problema 2285 — *Să se calculeze limita expresiei*

$$\frac{n+\cos a_0x-\sum_{i=1}^{n+1}\cos a_ix}{\sin^2 ax},$$

pentru $x=0$.

MARIA NEUMANN

Soluţie. Pentru $x=0$, expresia dată E, devine

$$E=\frac{n+1-(n+1)}{0}=\frac{0}{0},$$

avem o formă nedeterminată. Aplicăm regula lui *L'Hôspital*, adică luăm cătul derivatelor termenilor fracţiei date şi în urmă facem $x=0$, avem

$$E=\frac{-a_0\sin a_0x+\sum_{i=1}^{n+1}a_i\sin a_ix}{a\sin 2ax},$$

care pentru $x=0$ ne dă încă forma $\frac{0}{0}$.

Aplicăm încă odată regula lui *L'Hôspital* şi avem

$$E=\frac{-a_0^2\cos a_0x+\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2\cos a_ix}{2a^2\cos ax},$$

expresie care pentru $x=0$ ia forma finită

$$E=\frac{-a_0^2+\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2}{2a^2}$$

care este astfel limita căutată.

Soluţii date de d-nii: *Birănaş Ioan* (Arad), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *London E.* (Polit, Timişoara), *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Serdeleanu Gh.* (Polit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

Soluţia autoarei. Fără a întrebuinţa regula lui *L'Hôspital,* putem scri

$$E=\lim_{x\to 0}\cdot\frac{\cos a_0x-\cos a_{n+1}x+\sum_{i=1}^{n}(1-\cos a_ix)}{\sin^2 ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(a_0+a_{n+1})x}{2}\sin\frac{(a_{n+1}-a_0)x}{2}+2\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{a_ix}{2}}{\sin^2 ax}$$

$$=\frac{2\frac{a_n^2-a_0^2}{4}\lim_{x\to 0}\cdot\frac{\sin\frac{(a_0+a_{n+1})x}{2}}{\frac{(a_0+a_{n+1})x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(a_{n+1}-a_0)x}{2}}{\frac{(a_{n+1}-a_0)x}{2}}+2\sum_{l=1}^{n}\frac{a_i^2}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{a_ix}{2}}{\frac{a_ix}{2}}\right)^2}{a^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2}$$

$$=\frac{2\frac{a_{n+1}^2-a_0^2}{4}+2\frac{a_1^2+a_2^2\ldots+a_n^2}{4}}{a^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2-a_0^2}{2a^2}.$$

PROBLEME PROPUSE

2329. — Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se formeze trei numere astfel ca suma a două din ele să fie un multiplu al celui de al treilea.

G-L GH. BUICLIU

2330. — Să se determine a astfel ca numărul $aa9861$ să fie patrat perfect în orice sistem de numeraţie l'am considera. PETRE A. STANCIU

2331. — Să se discute ecuaţiile

$$x\pm\sqrt{3mx+4(m^2-25)}=0,$$

unde m este parametru real. EUGEN VISA

2332. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}x^3-axy^2=b,\\ y^3-ax^2y=b.\end{cases}$$

Caz particular: $a=-3$, $b=32$.

IONEL I. STAMATE

2333. — Dacă S este punctul unde coarda $\overline{A_1A_2}$, a două cercuri secante, tae tangenta lor exterioară comună $\overline{T_1T_2}$, avem relaţia;

$$\overline{T_1A_1}^2+\overline{T_2A_1}^2+2\overline{SA_2}=\overline{T_1A_2}^2+\overline{T_2A_2}^2+2\overline{SA_1}^2.$$

IOAN N. GRIGORE

2334. — Cubica, care trece prin picioarele a şase ceviene, dintre care trei câte trei sunt cuncurente şi prin trei puncte colineare, dintre care două sunt situate pe două dintre laturile triunghiului, este o cubică degenerată într'o conică care trece prin picioarele cevienelor şi într'o dreaptă.

MARIA NEUMANN

2335. — Într'un triunghiu, în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţiile:

$$b\cos B+c\cos C-2a\cos B\cos C=R\sin 2A,$$

$$a+b-\frac{c\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=2b\cos^2\frac{C}{2}+c\sin B\operatorname{cotg}\left(B+\frac{A}{2}\right).$$

V. ALACI

2336. — Se consideră triunghiul BAC ($A=135^0$), să se demonstreze relaţiile

$$b=c\sqrt{2}\,cp\,B,\qquad b=c\sqrt{2}\,sp\,B\,\frac{sp\left(45^0-\frac{C}{2}\right)}{sp\frac{C}{2}}.$$

CPT C. V. COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Avram Cristache (2171, 2193, 2230, 2263, 2266, 2267, 2271, 2288, 2290, 2296, 2300, 2303, 2305, 2311, 2312, 2319); *Bogza Mihai* (2056, 2301, 2302); *Brasch Andrei* (1687, 2207, 2230, 2247, 2271, 2290, 2325); *Chsaru Cristea* (P; 2135, 2319, 2323); *Constantinescu Ilie* (P; 2095, 2118, 2313, 2314, 2316, 2319); *Ionescu Petre* (P; 1414, 1758, 1832, 1882, 1898, 1919, 1935, 1965, 2026, 2134, 2262, 2194, 2218, 2234, 2240, 2241, 2245, 2257, 2261); *Mazilu Marius* (2261, 2267, 2271, 2272, 2276, 2288, 2290, 2296, 2298, 2299, 2302, 2303, 2305, 2310, 2311, 2312); *Miclea Nicolae* (2250, 2276, 2279, 2293, 2299, 2312); *Prisăcaru Mircea* (P); *Rohnlich Alfred* (2305, 2310); *Stamate I. I.* (P); *Vrânceanu Gh.* (2305, 2307, 2310, 2311, 2312, 2313, 2321); *Vişa Eugen* (A; P); *Wegener Eugen* (P; 2260, 2266, 2292).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvata de el. şi s'o iscălească.

ANUL XXV. IULIE 1945 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **C. BORS:** O METODA ELEMENTARA PENTRU STUDIUL CONICELOR.
2. NOTE MATEMATICE 10, 11, 12.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1182, 1883, 2233, 2241, 2269, 2279, 2284.
5. PROBLEME PROPUSE: 2337–2344.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 – 1 Martie 1946), este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

„R. M. T." mulţumeşte călduros distinsului său colaborator Dl. profesor *Vişa Eugen* pentru contribuţia s'a benevolă constând din două titluri ale „Împrumutului apărării naţionale" din 1944, unul în valoare de 10.000 lei şi altul de 5000 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 1000 lei fiecare.

ANUL XXV — NO. 5. TIMISOARA, IULIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

O METODĂ ELEMENTARĂ PENTRU STUDIUL CONICELOR

De C BORȘ.

Folosind metoda obișnuită pentru aflarea ecuațiilor canonice ale conicelor definite ca locuri geometrice, alegerea unui sistem de referință *oarecare*, face posibil studiul pe cale elementară al ecuației generale de gradul al II-lea.

Studiul de față încearcă a fi o contribuție la completarea programei de curs secundar.

I. **Conice cu centru.** Plecând dela definiția elipsei și hiperbolei ca locuri geometrice și alegând ca sistem de referință un sistem de axe rectangulare oarecare, dacă (x_0, y_0) sunt coordonatele centrului conicei și φ unghiul axei focale cu axa Ox, ecuațiile conicelor cu centru se obțin prin transscrierea analitică a proprietății

$$MF \pm MF' = 2a,$$

F și F' fiind focarele conicei Însemnând distanța focală $FF' = 2c$, avem

$$\sqrt{[x-(x_0+c\cos\varphi)]^2+[y-(y_0+c\sin\varphi)]^2} \pm \sqrt{[x-(x_0-c\cos\varphi)]^2+[y-(y_0-c\sin\varphi)]^2} = 2a.$$

Calculând se obține ecuația

$$(1)\quad \begin{aligned}&(c^2\cos^2\varphi-a^2)x^2+2c^2\sin\varphi\cos\varphi\,xy+(c^2\sin^2\varphi-a^2)y^2\\&-2x[c^2\cos^2\varphi-a^2)x_0+c^2\sin\varphi\cos\varphi\,y_0]\\&-2y[c^2\sin\varphi\cos\varphi\,x_0+(c^2\sin^2\varphi-a^2)y_0]\\&+(c^2\cos^2\varphi-a^2)x_0^2+2c^2\sin\varphi\cos\varphi\,x_0y_0\\&+(c^2\sin^2\varphi-a^2)y_0^2+a^2(a^2-c^2)=0.\end{aligned}$$

Deci o conică cu centru este reprezentată [1] printr'o ecuație de forma

$$(2)\quad f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Invers, fiind dată o ecuație de forma (2), prin identificarea ecuațiilor (1) și (2) pot fi determinate elementele conicei

$$\frac{A}{c^2\cos^2\varphi-a^2}=\frac{B}{c^2\sin^2\cos\varphi}=\frac{C}{c^2\sin^2\varphi-a^2}=\frac{-D}{(c^2\cos^2\varphi-a^2)x_0+c^2\sin\varphi\cos\varphi\,y_0}=\frac{-E}{c^2\sin\varphi\cos\varphi\,x_0+(c^2\sin^2\varphi-a^2)y_0}=\frac{F}{c^2\cos^2\varphi-a^2)x_0^2+2c^2\sin\varphi\cos\varphi\,x_0y_0+(c^2\sin^2\varphi-a^2)y_0^2+a^2(a^2-x^2)}=k,$$

k fiind o constantă de proporționalitate. Sistemul de ecuații

$$(3)\quad A=k(c^2\cos^2\varphi-a^2),\qquad (4)\quad B=k\,c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$(5)\quad C=k(c^2\sin^2\varphi-a^2),$$

$$(6)\quad -D=k[c^2\cos^2\varphi-a^2)x_0+c^2\sin\varphi\cos\varphi\,y_0]=Ax_0+By_0 \quad\text{sau}\quad Ax_0+By_0+D=0,$$

$$(7)\quad -E=k[(c^2\sin\varphi\cos\varphi\,x_0+(c^2\sin^2\varphi-a^2)y_0]=Bx_0+Cy_0 \quad\text{sau}\quad Bx_0+Cy_0+E=0,$$

$$(8)\quad F=k[(c^2\cos^2\varphi-a^2)x_0^2+2c^2\sin\varphi\cos\varphi\,x_0y_0+(c^2\sin^2\varphi-a^2)y_0^2+a^2(a^2-c^2)]$$

sau

$$F=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+ka^2(a^2-c^2)$$

permite determinarea elementelor conicei (centrul, unghiul φ și mărimele axelor) A, B, C, D, E și F fiind coeficienții cunoscuți ai ecuației date.

1. *Determinarea centrului conicei.* Relațiile (6) și (7) arată că coordonatele centrului conicei sunt date de sistemul de ecuații

$$(9)\quad \begin{aligned}Ax+By+D&=0,\\Bx+Cy+E&=0,\end{aligned}$$

[1] Cu o restricție care va fi imediat semnalată.

Condiția de compatibilitate a acestui sistem

$$\delta = AC - B^2 \neq 0 \tag{10}$$

este condiția ca ecuația (2) să reprezinte o conică cu centru. Deci, *o conică cu centru este reprezentată printr'o ecuație de forma* (2) *și ai cărei coeficienți satisfac condiția* (10).

Rezolvând sistemul de ecuații (9), obținem coordonatele centrului

$$x_0 = \frac{BE - DC}{\delta}, \quad y_0 = \frac{BD - AE}{\delta}. \tag{10'}$$

Ecuațiile sistemului (9) pot fi scrise și sub forma

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

2. *Determinarea direcției axelor conicei.* Determinarea unghiului φ se face cu relațiile (3), (4) și (5). Se găsește că unghiul φ este soluția ecuației trigonometrice

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A - C} \tag{11}$$

cuprinsă între 0 și $\frac{\pi}{2}$.

3. *Mărimile axelor.* Înlocuind în ecuațiile (3), (4), (5) și (8) pe

$$c^2 = a^2 - \varepsilon b^2, \quad \varepsilon = \begin{matrix} +1 \text{ elipsă} \\ -1 \text{ hiperbolă,} \end{matrix}$$

avem pentru determinarea axelor conicei sistemul

$$\frac{A}{k} = -(a^2 \sin^2\varphi + \varepsilon b^2 \cos^2\varphi), \tag{3'}$$

$$\frac{B}{k} = (a^2 - \varepsilon b^2) \sin\varphi \cos\varphi, \tag{4'}$$

$$\frac{C}{k} = -(a^2 \cos^2\varphi + \varepsilon b^2 \sin^2\varphi), \tag{5'}$$

$$\frac{Dx_0 + Ey_0 + F}{k} = \varepsilon a^2 b^2, \tag{8'}$$

Din (8')

$$k = \frac{Dx_0 + Ey_0 + F}{\varepsilon a^2 b^2}.$$

Înlocuind pe x_0 și y_0 prin valorile lor (10), numărătorul expresiei precedente se scrie sub forma

$$Dx_0 + Ey_0 + E = \frac{2BDE + ACF - B^2F - D^2C - E^2A}{\delta} = \frac{\Delta}{\delta},$$

în care

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Din (8') și (12), avem

$$\varepsilon a^2 b^2 = \frac{\Delta}{\delta} \cdot \frac{1}{k}. \tag{13}$$

Adunând parte cu parte relațiile (3') și (5'),

$$\frac{\eta}{k} = -(a^2 + \varepsilon b^2), \text{ în care } \eta = A + C. \tag{14}$$

Relațiile (13) și (14) vor da semiaxele a și b ale conicei, dacă vom determina constanta de proporționalitate k. Din (3') și (5'),

$$\frac{AC}{k^2} = \sin^2\varphi \cos^2\varphi (a^2 - \varepsilon b^2)^2 + \varepsilon a^2 b^2.$$

Folosind (4')

$$\frac{AC}{k^2} = \frac{B^2}{k^2} + \varepsilon a^2 b^2,$$

adică

$$\varepsilon a^2 b^2 = \frac{\delta}{k^2}$$

și înlocuind în (13), avem pentru k

$$k = \frac{\delta^2}{\Delta}, \tag{15}$$

În cele ce urmează, presupunem Δ diferit de zero. Pentru cazul $\Delta = 0$, al conicelor degenerate, se va vedea *N. Abramescu:* „Lecțiuni de Geometrie Analitică", pag. 80.

Ecuațiile (13) și (14) devin

$$\varepsilon a^2 b^2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}, \tag{13'}$$

$$a^2 + \varepsilon b^2 = -\frac{\Delta \eta}{\delta^2}. \tag{14'}$$

Substituind, pentru simplificare,

$$\sigma_1 = a^2, \quad \sigma_2 = \varepsilon b^2, \tag{16}$$

avem

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{\Delta \eta}{\delta^2}, \quad \sigma_1 \sigma_2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}, \tag{16'}$$

adică σ_1 și σ_2 sunt rădăcinile de gr. al II-lea

$$\sigma^2 + \frac{\Delta \eta}{\delta^2}\sigma + \frac{\Delta^2}{\delta^3} = 0. \tag{17}$$

Această ecuație, ținând seamă de (16), determină axele conicei (2). Ecuația în σ are *rădăcinile reale.* În adevăr realizantul ecuației nu poate fi niciodată negativ fiind egal cu o sumă de patrate

$$R = (A - C)^2 + 4B^2 > 0.$$

4. *Genul conicei* (2). Ecuaţia (17) în σ, în afară de determinarea axelor, permite şi discuţia naturii conicei reprezentată prin ecuaţia (2).

După forma canonică a ecuaţiei conicelor cu centru

$$\frac{x^2}{a^2}+\varepsilon\frac{y^2}{b^2}-1=0, \quad \varepsilon=\begin{matrix}+1 \text{ elipsă}\\ -1 \text{ hiperbolă}\end{matrix}$$

se ştie că această ecuaţie reprezintă o elipsă sau o hiperbolă după cum cantităţile a^2 şi εb^2 sunt de aceleaşi semne sau de semne contrarii, sau — după (16) — după cum rădăcinile ecuaţiei în σ sunt de acelaş semn sau nu.

Produsul şi suma rădăcinilor ecuaţiei (17) sunt

$$(13') \qquad P=\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\cdot\frac{1}{\delta}, \qquad (14') \quad S=-\frac{\Delta\eta}{\delta^2}.$$

a) Conica reprezentată prin ecuaţia (2) *este o elipsă,* dacă rădăcinile ecuaţiei (17) sunt de acelaş semn, adică $P>0$. Din (13') rezultă că trebue să avem în acest caz $\delta>0$. Deci ecuaţia (2) *reprezintă o elipsă dacă* $\delta>0$. Elipsa este reală dacă rădăcinile ecuaţiei (17) sunt pozitive, adică după (14')

$$\Delta\eta<0$$

şi *imaginară dacă rădăcinile ecuaţiei în* σ *sunt negative,* adică — după (14') —

$$\Delta\eta>0 \qquad (\Delta\neq 0).$$

b) Conica (2) este o hiperbolă dacă rădăcinile ecuaţiei în σ sunt de semne contrarii, adică $P<0$. După (13') pentru aceasta trebue ca $\delta<0$.

Comparând cu forma canonică, deducem că dacă $\Delta\eta>0$ ecuaţia (2) reprezintă hiperbola conjugată.

c) Condiţia ca ecuaţia (2) să reprezinte un cerc este ca — în cazul conicelor de gen eliptic — ecuaţia în σ să aibă rădăcinile egale ($a^2=\varepsilon b^2$ şi $\varepsilon=1$), adică realizantul ecuaţiei (17) să fie nul

$$\frac{\Delta^2}{\delta^4}[(A-C)^2+4B^2]=0 \qquad (\Delta\neq 0),$$

care dă condiţiile

$$A=C, \quad B=0,$$

căci am presupus $\Delta\neq 0$.

d) Condiţia ca ecuaţia (2) să reprezinte o hiperbolă echilateră (în cazul $\delta<\Delta$), este ca ecuaţia în σ să aibă rădăcinile egale şi de semn contrar, adică $\Delta\eta=0$ şi cum $\Delta\neq 0$, rezultă $\eta=0$.

5. Să se găsească elementele conicei dată prin ecuaţia

$$3x^2+2xy+3y^2+8y+4=0.$$

1. Centrul este dat de sistemul de ecuaţii (9)

$$\begin{matrix}3x+y=0,\\ x+3y+4=0,\end{matrix} \qquad \delta=8>0,$$

adică ecuaţia reprezintă o elipsă cu centrul în punctul

$$x_0=\frac{1}{2}, \qquad y_0=-\frac{3}{2}.$$

2. Direcţia axei este soluţia ecuaţiei trigonometrice (11)

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2B}{A-C}=\frac{2}{0}, \qquad 2\varphi_0=\frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_0=\frac{\pi}{4}, \quad -0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}.$$

3. Mărimile axelor sunt date de ecuaţia (17)

$$\sigma^2+\frac{\Delta\eta}{\delta^2}\sigma+\frac{\Delta^2}{\delta^2}=0,$$

în care

$$\delta=8, \quad \Delta=-16, \quad \mu=6$$

ecuaţia în σ este, pentru conica dată,

$$\sigma^2-\frac{9}{8}\sigma+\frac{9}{32}=0$$

ale cărei rădăcini

$$\sigma_1=a^2=\frac{3}{4},$$

$$\sigma_2=\varepsilon b^2=b^2=\frac{3}{8}, \qquad \varepsilon=+1, \text{ căci } \delta>0.$$

4. Ecuaţiile axelor conicei sunt

$$x-y-2=0 \quad \text{axa transversă},$$
$$x+y+1=0 \quad \text{axa conjugată}.$$

Coordonatele focarelor,

$$x=x_0\pm c\cdot\cos 45^0=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right),$$

$$y=y_0\pm c\cdot\sin 45^0=-\frac{3}{2}\left(1\mp\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right).$$

II. **Parabola.** Dacă φ este unghiul pe care îl face axa parabolei cu direcţia pozitivă a axei $x'x$, (x_0, y_0) coordonatele vârfului parabolei şi p parametrul ei, coordonatele focarului sunt

$$F\left(x_0+\frac{p}{2}\cos\varphi,\quad y_0+\frac{p}{2}\sin\varphi\right),$$

iar ecuaţia directoarei

$$y-\left(y_0-\frac{p}{2}\sin\varphi\right)=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\left[x-\left(x_0-\left(\frac{p}{2}\cos\varphi\right)\right)\right].$$

Parabola fiind locul geometric al punctelor egal depărtate de focar şi directoare, ecuaţia ei este

$$\left[x-\left(x_0+\frac{p}{2}\cos\varphi\right)^2\right]+\left[y-\left(y_0+\frac{p}{2}\sin\varphi\right)\right]=$$

$$\frac{\left[x+y\operatorname{tg}\varphi-\left(x_0-\frac{p}{2}\cos\varphi\right)-\operatorname{tg}\varphi\left(y_0-\frac{p}{2}\sin\varphi\right)\right]^2}{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

sau

$$(19)\ (x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2-2x(x_0\sin^2\varphi-y_0\sin\varphi\cos\varphi+p\cos\varphi)$$
$$-2y(-x_0\sin\varphi\cos\varphi+y_0\cos^2\varphi+p\sin\varphi)$$
$$+(x_0\sin\varphi-y_0\cos\varphi)^2+2p(x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi)=0.$$

Această ecuaţie de gr. al II-lea în x şi y este de forma (2), care — în cazul $\delta\neq 0$ — am văzut că reprezintă o conică cu centru. În cazul parabolei se vede din (19) că termenii patratici ai ecuaţiei (2) trebue să formeze un patrat perfect, adică coeficienţii ecuaţiei (2) trebuesc să satisfacă condiţia

$$\delta=AC-B^2=0.$$

Ecuaţia generală a parabolei este deci de forma

$$(2')\qquad (mx-ny)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

pe care o obţinem din (2) punând

$$A=m^2,\ B=-mn,\ C=n^2.$$

Determinarea elementelor parabolei se face din condiţiile de identitate între ecuaţiile (19) şi (2'),

$$(20)\quad m^2=k\sin^2\varphi,\qquad (21)\quad mn=k\sin\varphi\cos\varphi$$

$$(22)\qquad n^2=k\cos^2\varphi,$$

$$(23)\quad -D=k(x_0\sin^2\varphi-y_0\sin\varphi\cos\varphi+p\cos\varphi),$$

$$(24)\quad -E=k(-x_0\sin\varphi\cos\varphi+y_0\cos^2\varphi+p\sin\varphi),$$

$$(25)\quad F=k[(x_0\sin\varphi-y_0\cos\varphi)^2+2p(x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi)],$$

în care k este o constantă de proporţionaiitate a cărei valoare este

$$(26)\qquad k=m^2+n^2,$$

obţinută din (20) şi (22).

Sistemul de ecuaţii de mai sus determină φ, p, x_0 şi y_0.

1. *Direcţia axei.* Valoarea lui φ este dată de soluţia $-\frac{\pi}{2}<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ a ecuaţiei trigonometrice

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{m}{n},$$

obţinută prin împărţirea relaţiilor (20) şi (21).

Din (27) se deduce

$$(27')\quad \sin\varphi=\frac{\varepsilon m}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad \cos\varphi=\frac{\varepsilon n}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

în care $\varepsilon=\pm 1$ aşa fel încât $\cos\varphi$ să fie cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$. Deci ε este pozitiv sau negativ odată cu n.

2. *Parametrul parabolei.* Scriind ecuaţiile (23) şi (24) subt forma

$$(23')\qquad m^2x_0-mny_0+D+\varepsilon pn\sqrt{m^2+n^2}=0,$$

$$(24')\qquad -mnx_0+n^2y_0+E+\varepsilon pm\sqrt{m^2+n^2}=0,$$

înmulţind prima ecuaţie cu n şi a doua cu m şi adunându-le găsim

$$(28)\qquad p=-\frac{nD+mE}{\varepsilon(m^2+n^2)^{3/2}},\qquad \text{în care } \varepsilon n>0.$$

În practică se foloseşte o formă mai uşor de reţinut a acestei formule. Calculând determinantul Δ pentru ecuaţia (2'), avem

$$\Delta=-(nD+mE)^2$$

şi folosind

$$\eta=A+C=m^2+n^2,$$

formula (28) se scrie subt forma simplă

$$(28')\qquad p^2=-\frac{\Delta}{\mu^3}.$$

3. *Coordonatele vârfului parabolei.* Pentru determinarea coordonatelor vârfului parabolei folosim şi ecuaţia

$$(mx_0-ny_0)+2Dx_0+2Ey_0+F=0,$$

care exprimă că vârful se află pe parabolă. Această ecuaţie, folosind relaţia (25) şi înlocuind parametrul cu valoarea (28), devine

$$(29)\qquad x_0[D(m^2+n^2)+n(nD+mE)]+$$
$$y_0[E(m^2+n^2)+n(nD+mE)]+F(m^2+n^2)=0.$$

Eliminând p între ecuaţiile (23') şi (24')

$$(29')\quad (mx_0-ny_0)(m^2+n^2)+mD-nE=0.$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (29) şi (29′),

$$x_0 = \frac{(m^2+n^2)\,E\,(m\,D-n\,E)+m\,(m\,E+n\,D)\,(m\,D-n\,E)+F\,n\,(m^2+n^2)^2}{2\,(m^2+n^2)^2\,(m\,E+n\,D)},$$

$$y_0 = \frac{(m^2+n^2)\,D\,(m\,D-n\,E)+n\,(m\,E+n\,D)\,(m\,D-n\,E)-F\,m\,(m^2+n^2)^2}{2\,(m^2+n^2)^2\,(m\,E+n\,D)}.$$

Aceste valori fiind greu de reţinut, practic se vor afla coordonatele vârfului parabolei intersectând parabola cu axa ei. Ecuaţia axei este

$$y-y_0=\frac{m}{n}(x-x_0),$$

înlocuind pe x_0 şi y_0 cu valorile de mai sus, obţinem ecuaţia axei parabolei

$$(30)\qquad m\,x-n\,y+\frac{m\,D-n\,E}{m^2+n^2}=0.$$

Deci, pentru aflarea coordonatelor vârfului parabolei se va rezolva sistemul format din ecuaţiile (2′) şi (30).

NOTE MATEMATICE

10. — *Sur quatre sphères associées au tétraèdre.*

G étant le centre de gravité d'un tétraèdre ABCD, M un point quelconque de l'espace, un théorème connu donne

$$(1)\qquad \overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2+4\,\overline{MG}^2.$$

On en déduit que le lieu des points M dont la somme des carrés des distances aux sommets du tétraèdre ABCD est constante, est une sphère de centre G.

Parmi les sphères ainsi obtenues, on peut distinguer celles qui passent par A, B, C ou D; elles sont respectivement les lieux des points tels que la somme $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2$ est égale à $b^2+c^2+a'^2$, $c^2+a^2+b'^2$, $a^2+b^2+c'^2$ ou $a'^2+b'^2+c'^2$. Elles coupent la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD suivant quatre cercles dont les plans sont perpendiculaires à la droite d'*Euler* OG joignant le centre de la sphère circonscrite au centre de gravité du tétraèdre ABCD.

Si le tétraèdre ABCD est *équifascial*, les quatre sphères considérées coïncident avec la sphère circonscrite, celle-ci joint donc de la propriété que la somme des carrés des distances de chacun de ses points aux sommets du tétraèdre est égale à la somme des carrés $a^2+b^2+c^2$ de trois arêtes inégales.

Dans le tétraèdre régulier, la sphère circonscrite est le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux sommets du tétraèdre est égale à trois fois le carré d'une arête.

Ces propriétés particulières résultent aussi directement de l'équation (1).

V. THÉBAULT

11. — *Asupra transformării rombice şi antirombice.*

Voiu nota în cele ce urmează transformarea rombică de ordinul n [1] cu P_n şi transformarea antirombică de acelaşi ordin cu $\bar{P}_n$, elementele date cu litere mari, cele căpătate prin P_n şi $\bar{P}_n$, respectiv cu litere mici simple şi supraliniate, fără a le mai afecta cu indici.

1. Consider o figură şi două puncte M_1, M_2, ale ei situate pe aceiaşi rază vectoare, precum şi transformatele prin P_n şi $\bar{P}_n$, $m_1, m_2, \bar{m}_1$ şi $\bar{m}_2$.

Din triunghiuri asemenea am:

$$(1)\qquad \frac{r_2}{R_2}=\frac{r_1}{R_1}=\frac{R_2}{\bar{r}_2}=\frac{R_1}{\bar{r}_1},$$

unde R_i sunt modulii polari corespunzători.

Rapoartele (1) mă duc la relaţia

$$(2)\qquad r_2\,\bar{r}_1=r_1\,\bar{r}_2=R_1\,R_2.$$

Notând $\overrightarrow{M_1M_2}=D$, $\overrightarrow{m_1m_2}=d$ şi $\overrightarrow{\bar{m}_1\bar{m}_2}=\bar{d}$ am:

$$(3)\qquad \boxed{D^2=d.\bar{d}}.$$

Adică: *distanţele între două puncte pe aceiaşi rază vectoare este medie proporţională între distanţele dintre transformatele de ordin n prin* P_n *şi* $\bar{P}_n$.

[1]) *V. Alaci*, R. M. T., No. 11, 1940.

Intr'adevăr trebue să am:

$$D^2 = (R_1 - R_2)^2 = (r_1 - r_2)(\bar{r}_1 - \bar{r}_2),$$

sau

$$(R_1 - R_2)^2 = r_1\bar{r}_1 + r_2\bar{r}_2 - (r_1\bar{r}_2 + \bar{r}_2 r_2),$$

care este verificată de (2) şi formulele D-lui prof. *V. Alaci* [2].

(4) $$R_1^2 = r_1\bar{r}_1, \quad R_2^2 = r_2\bar{r}_2.$$

2. *Raportul simplu a trei puncte colineare cu* O, *este medie proporţională cu raportul simplu al transformatelor de ordinul n prin* $\bar{P}_n$ *şi* $\bar{P}_n$.

Această relaţie se deduce imediat cu ajutorul lui (3).

3. *Biraportul a patru puncte* M_i *colineare cu* O *este medie proporţională între biraportul punctelor* m_i *şi* $\bar{m}_i$.

Şi această relaţie se deduce imediat cu ajutorul lui (3).

4. *Aria* S *a triughiului format de* O *şi două puncte* M_1, M_2 *este medie proporţională între ariile* $s = O\,m_1 m_2$ *şi* $\bar{s} = O\,\bar{m}_1 \bar{m}_2$

(5) $$\boxed{S^2 = s.\bar{s}}.$$

Intradevăr am

$$S = R_1 R_2 \sin\omega$$
$$s = r_1 r_2 \sin\omega \qquad (\omega = \sphericalangle M_1 O M_2)$$
$$\bar{s} = \bar{r}_1 \bar{r}_2 \sin\omega.$$

Aceste relaţii cu ajutorul formulei (4) al D-lui prof. *V. Alaci* ne duc la (5).

5. *Aria* A *triunghiului* $M_1 M_2 M_3$ *ce are două vârfuri* (M_1, M_2) *colineare cu* O, *este medie proporţională între ariile* $a = O\,m_1 m_2$, $\bar{a} = O\,\bar{m}_1 \bar{m}_2$

(6) $$\boxed{A^2 = a.\bar{a}}.$$

Intradevăr am

$$A = R_3 (R_2 - R_1) \sin\omega$$
$$a = r_3 (r_2 - r_1) \sin\omega \qquad (\omega = \sphericalangle M_1 O M_3)$$
$$\bar{a} = \bar{r}_3 (\bar{r}_2 - r_1) \sin\omega.$$

Aceste relaţii în virtutea formulei (4) a D-lui prof. *V. Alaci* şi a lui (3) ne duc la (6).

6. Fie două puncte M_1, M_2 necolineare cu O şi un punct N_1 pe OM_2.

[2] *V. Alaci*, R. M. T., No. 11, 1940.

După (6) am

$$(\text{aria}\,\Delta M_1 M_2 N)^2 = (\text{aria}\,\Delta m_1 m_2 n_1)(\text{aria}\,\Delta \bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{n}_1)$$

care se mai poate scrie

$$\left[\overrightarrow{M_1 M_2}.\overrightarrow{M_1 N_1}\sin\psi\right]^2 = \left(\overrightarrow{m_1 m_2}.\overrightarrow{m_1 n_1}\sin\psi\right) \times \left(\overrightarrow{\bar{m}_1 \bar{m}_i}\,\overrightarrow{\bar{m}_1 \bar{n}_1}\sin\bar{\psi}\right),$$

unde

$$\psi = \sphericalangle N_1 M_2 M_1 \text{ etc.}$$

Dar

$$\overrightarrow{M_2 N_2'} = \overrightarrow{m_2 n_1}.\overrightarrow{\bar{m}_1 \bar{n}_1},$$

deci

(7) $$\boxed{\left[\overrightarrow{M_1 M_2}\sin\psi\right]^2 = \left(\overrightarrow{m_1 m_2}\sin\psi\right)\left(\overrightarrow{\bar{m}_1 \bar{m}_2}\sin\bar{\psi}\right)}.$$

Adică: *distanţa dela un punct* M *la o rază vectoare este medie proporţională între distanţele punctelor m şi* $\bar{m}$ *la aceiaşi rază vectoare.*

EUGEN V. DOBRESCU

---

12. — *O metodă pentru calcularea sumei puterilor asemenea ale numerelor naturale.*

Voiu arăta, în rândurile ce urmează, o metodă simplă şi unitară, diferită de cea obicinuită, pentru calcularea sumei puterilor asemenea ale numerelor naturale.

Să calculăm suma numerelor naturale dela 1 la n.

Pentru aceasta pornim dela egalitatea evidentă

$$C_n^1 = n,$$

în care facem pe n egal cu $1, 2, \ldots, n$ Avem

$$C_1^1 = 1,\ C_2^1 = 2,\ C_3^1 = 3, \ldots,\ C_n^1 = n.$$

Adunând, vom avea

$$C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \cdots + C_n^1 = S_1.$$

Se ştie din analiza combinatorie, că

$$\sum_{n=1}^{n} C_n^1 = C_{n+1}^2.$$

Urmează că

$$S_1 = C_{n+1}^2 = \frac{n+1}{2}\,n.$$

Pentru calcularea sumelor superioare sumei S_1, ne servim de următoarea metodă:

Se cunoaşte din Analiza combinatorie următoarea formulă

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

la fel şi

(1) $$\boxed{C_{m+1}^{n} = C_{m}^{n-1} + C_{m}^{n}}.$$

În această ultimă formulă înlocuim pe n cu 2, 3, 4... după cum vrem să aflăm sumele S_2, S_3, S_4....

Înlocuim în (1) pe n cu 2. Avem

$$C_{m+1}^{2} = C_{m}^{1} + C_{m}^{2},$$

sau

$$m\frac{m+1}{2} = C_{m}^{1} + C_{m}^{2},$$

sau

$$m^2 + m = 2C_{m}^{1} + 2C_{m}^{2}, \quad m^2 = 2m - m + 2C_{m}^{2},$$

$$\boxed{m^2 = 2C_{m}^{2} + C_{m}^{1}}.$$

În această ultimă relaţie facem pe m egal cu 1, 2, 3, ..., n

$$\begin{aligned} 1^2 &= 2C_1^2 + C_1^1, \quad C_1^2 = 0, \\ 2^2 &= 2C_2^2 + C_2^1, \\ 3^2 &= 2C_3^2 + C_3^1, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots, \\ n^2 &= 2C_n^2 + C_n^1. \end{aligned}$$

Adunând, avem

$$S_2 = 2\sum_{n=2}^{n} C_n^2 + \sum_{n=1}^{n} C_n^1.$$

Dar

$$\sum_{n=2}^{n} C_n^2 = C_{n+1}^2; \qquad \sum_{n=1}^{n} C_n^1 = C_{n+1}^2;$$

$$S_2 = 2C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2.$$

Desvoltăm combinările şi obţinem

$$S_2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6}.$$

Deci

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pentru calcularea sumei cuburilor primelor n numere facem în formula (1) pe n egal cu 3.

$$C_{m+1}^{3} = C_{m}^{2} + C_{m}^{3},$$

sau

$$\frac{(m+1)(m-1)m}{2.3} = C_{m}^{2} + C_{m}^{3},$$

sau

$$m^3 - m = 6C_{m}^{2} + 6C_{m}^{3},$$

$$\boxed{m^3 = 6C_{m}^{3} + 6C_{m}^{2} + m}.$$

În această ultimă relaţie facem pe m egal cu 1, 2, 3, ..., n.

$$\begin{aligned} 1^3 &= 6C_1^3 + 6C_1^2 + 1 \\ 2^3 &= 6C_2^3 + 6C_1^2 + 2 \\ 3^3 &= 6C_3^3 + 6C_3^2 + 3 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n^3 &= 6C_n^3 + 6C_n^2 + n. \end{aligned}$$

Adunăm şi obţinem

$$S_3 = 6\sum_{n=3}^{n} C_n^3 + 6\sum_{n=2}^{n} C_n^2 + \sum_{n=1}^{n} C_n^1.$$

Dar

$$\sum_{n=3}^{n} C_n^3 = C_{n+1}^4; \quad \sum_{n=2}^{n} C_n^2 = C_{n+1}^3; \quad \sum_{n=1}^{n} C_n^1 = C_{n+1}^2.$$

Rezultă, că

$$S_3 = 6C_{n+1}^4 + 6C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2.$$

Desvoltăm

$$S_3 = 6\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} + 6\frac{(n+1)n(n-1)}{2.3} + \frac{(n+1)n}{2}.$$

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{4}[n^2 - 3n + 2 + 4n - 4 + 2] = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

Deci

$$S_3 = S_1^2.$$

Continuând în acest mod, putem găsi sumele S_4, S_5, ş a. m. d.

ILIE CONSTANTINESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, No. 10 Iunie 1945. Rezultatul Concursului „*Gazetei Matematice*“ din 1945, de *Gh. D. Simionescu*. Erorile de tipar în cărţile de matematică, de *Ion Ionescu*. Raport asupra premiului „*V. Cristescu*“, de *Alex. V. Niculescu, Gh. D. Simionescu, P. Sergescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Th. Angheluță*. Curs de Algebră superioară, Vol. II.

Este un volum de 356 pagini, tipărit în condiții foarte bune și care complectează primul volum apărut anul trecut.

In aceste timpuri pline de sbucium sufletesc și îngrijorare, D-l profesor *Angheluță* de la Universitatea din Cluj (temporal la Timișoara), a reușit să tipărească aceste două volume cuprinzând „Cursul de Algebră superioară", minunată operă didactică, cu foarte multe aplicații, clar expuse, începând cu chestiunile cele mai simple și ridicându-se până la teoria lui *Galois*.

Toate generațiile de studenți, care vor sorbi cu bucurie, adevărurile cuprinse în paginele celor două volume, vecinic vor fi recunoscători acestui adevărat apostol și creator de știință pură, care și-a dăruit cu drag și entuziasm clipele sale de odihnă, științei și școalei.

Pentru a pune mai bine în lumină conținutul acestui al 2-lea volum de Algebră superioară, vom reda o parte din prefață, adevărată pagină literară în același timp.

„Paginele următoare au fost tipărite în vremuri de grea restriște pentru neamul românesc, ca și pentru întreaga omenire. Au fost clipe, când m'am îndoit dacă lucrarea va fi dusă la sfârșit. Mai ales, atunci, când, în urma bombelor aruncate din avione, a fost inundat adăpostul, unde se afla biblioteca „Laboratorului de Algebră" și manuscrisul acestui volum. Totuși am ajuns să scriu prefața! Se vede că omul capătă puteri nebănuite din dorința de a servi, din idealul de a-și împlini datoria! Și am avut grijă nemărginită ca lucrarea să nu se resimtă de sbuciumul sufletesc al autorului.

Un curs de bază ca acesta se cere alcătuit așa ca să fie de sine stătător și să cuprindă tot ce este necesar unei temeinice pregătiri. Citațiile nu meroase din text au numai menirea de a stimula și a îndruma pe acei, ce doresc să aprofundeze anumite probleme. Primele capitole cuprind noțiuni fundamentale, relative la funcții de o variabilă și la serii de funcții. Ca aplicații, urmează studiul variației funcțiilor, separarea și aproximația rădăcinelor unei ecuații. Un capitol mai restrâns este reservat funcțiilor de mai multe variabile și funcțiilor implicite.

Ecuațiile algebrice ocupă un loc preponderant în Algebra Superioară. Studiul lor, început din primele pagini ale volumului întâiu, înaintează odată cu cunoștințele necesare. De aceea, ultimul capitol, al volumului al 2-lea este numai o întregire a acestui studiu. Am socotit că în acest capitol se încadrează bine, după transformarea ecuațiilor, demonstrația transcendenței numărul π. Iar după ecuațiile abeliene, am tratat celebrele probleme din Geometrie: Inscrierea poligoanelor regulate, Duplicațiunea cubului, Trisecțiunea unghiului și Cuadratura cercului. Capitolul se încheie cu rezultatele esențiale ale Teoriei lui Galois.

In demonstrația teoremei fundamentale, m'am servit de ecuațiile abeliene, studiate după Abel. Experiența mi-a arătat că astfel se ușurează introducerea în această Teorie, atât de obstractă mai cu seamă pentru începători. Cunoștințele date aici sunt însă suficiente, pentru a putea urmări cu folos expuneri mai desvolte Exemple însoțesc partea teoretică și exerciții, cu indicații, vin după fiecare capitol, peste tot mai mult de cinci sute".

Mai departe găsim:

„Studenții, care vor veghea târziu noaptea, meditând pe foile acestui curs, să-și aducă aminte că au fost scrise spre a le înlesni urcarea pe culmile înalte și senine ale Științelor Matematice".

3. *Gh. Th. Gheorghiu*. Curs de gemetrie descriptivă.

Acest volum conține 192 pagini litografiate format mare și cuprinde 351 figuri foarte bine și clar executate.

Este cursul de geometrie Descriptivă predat pe D-l profesor *Gheorghiu* studenților săi de la Politehnica Timișoara, fiindu-le de un real folos.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1182 — *Să se construiască triunghiul* A B C, *cunoscând picioarele perpendicularelor din vârful* A *pe bisectoarele unghiurilor din* B *și* C, *precum și unghiurile ce aceste perpendiculare fac cu latura* B C.

IOAN SANDULESCU

Soluție. Enunțul nu precizează pe care din bisectoarele unghiurilor B și C sunt punctele cunoscute și nici nu face vre-o restricție. Vom considera deci proecțiile punctului A pe toate bisectoarele unghiurilor B și C. Fie prin urmare B_i, C_i și B_e, C_e proecțiile lui A pe bisectoarele interioare și pe bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C. Fie încă B'_i, C'_i și B'_e, C'_e intersecțiile lui B C cu AB_i, AC_i și AB_e, AC_e.

Vom căuta a construi triunghiul A B C, atunci când *se dau* două din punctele B_e, B_i, C_e, C_i și unghiurile pe care perpendicularele corespunzătoare le fac cu B C.

Observăm că, de exemplu B_e este mijlocul lui AB'_e, căci în triunghiul $AB B'_e$ dreapta BB_e fiind bisectoare și înălțime, triunghiul est isoscel. La fel se arată că B_i, C_e, C_i sunt mijloacele segmentelor AB'_i, AC'_e, AC'_i deci B_e, C_i, B_i, C_e sunt pe o dreaptă Δ paralelă cu B C iar unghiurile pe care AB'_e, AC'_i, AB'_i, AC'_e le fac cu B C sunt egale cu acelea pe care aceleași drepte le fac cu Δ. De aici următoarea construcție:

Se unesc punctele date, de exemplu B_e și C_i, sau B_e și B_i, sau B_e și C_e etc. și se construesc în B_e și C_i etc. unghiuri egale cu AB'_eB și AC'_eB etc. Intersecțiile laturilor acestor unghiuri dau punctul A.

Problema admite o singură soluție și este totdeauna posibilă.

Au resolvat bine problema, considerând numai punctele B_i, C_i, D-nii: *Lupescu Gh Corneliu, Mihalcea V. V.; Popa Nicolae, Șubac Gh. Ion, Sâmbotin Gh. și Vișa Eugen.*

Gh B.

Problema 1883. — *Să se găsească o progresie geometrică de 11 termeni, știind că produsul termenilor este 2048 și că suma termenilor de rang 6, 8, 10 este de două ori mai mică decât suma termenilor de rang 7, 9, 11.*

CORNELIA NANES

Soluție. Fie

$$\div aq^{-5} : aq^{-4} : aq^{-3} : aq^{-2} : aq^{-1} : a : aq^{1} : aq^{2} : aq^{3} : aq^{4} : aq^{5},$$

progresia căutată. Conform enunțului avem

$$a^{11} = 2048 = 2^{11} \quad \therefore \quad a = 2$$

$$(a + aq^2 + aq^4) = aq + aq^3 + aq^5$$

$$q^5 - 2q^4 + q^3 - 2q^2 + q - 2 = o$$

$$(q-2)(q^4 + q^2 + 1) = o,$$

care are rădăcinile

$$q_1 = 2, \quad q_2 = \sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}; \quad q_3 = -\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$$

$$q_4 = \sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}, \quad q_5 = -\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}.$$

Problema are deci 5 soluții, una în care toți termenii sunt reali și 4 în care rația este imaginară.

A găsit numai soluție reală D-l Locot. *Boerescu P. G.* (Constanța).

Gh. B.

Problema 2233. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, știind că este egal cu suma a două numere - unul din trei cifre și celălalt din patru cifre — ambele fiind în același timp patrate și cuburi perfecte, minus un număr de două cifre, care e în același timp patrat și cub perfect.*

LUCIAN MUNTEANU

Soluție. Cuburile de două, de trei și de patru cifre sunt următoarele

		$10^3 = 1000$
		$11^3 = 1331$
		$12^3 = 1728$
		$13^3 = 2197$
	$5^3 = 125$	$14^3 = 2744$
$2^3 = 8$	$6^3 = 216$	$15^3 = 3375$
$3^3 = 27$	$7^3 = 343$	$16^3 = 4096 = 64^2$
$4^3 = 64 = 8^2$	$8^3 = 512$	$17^3 = 4913$
	$9^3 = 729 = 27^2$	$18^3 = 5832$
		$19^3 = 6859$
		$20^3 = 8000$
		$21^3 = 9261$

Dintre aceste cuburi de două, trei și patru cifre sunt, respectiv, în același timp și patrate perfecte numai

64, 729, 4096.

Conform enunțului, patratul N cerut trebuie să fie dat de egalitatea

$$N = 729 + 4096 - 64 = 4761 = 69^2.$$

Numărul 4761 fiind patrat perfect și împlinind toate condițiile enunțului, este singura soluție a problemei.

Soluție dată de d-ra *Măran Ana* (Polit., Timișoara) și de d-nii: *Avram Cristache* (Lic., Brăila), *Barbu Ioan*, *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Dăscălescu Hristache* (R. Sărat), *Grigore A. Gheorghe*, *Boerescu P. G.* (Cpt., Constanța), *Brașovean Gheorghe* (Lic. T-Severin), *Costea Fl.* (Lic. Beiuș), *Ionescu Petre*, *Mazilu M*, *Miclea Nicolae* (Polit., Timișoara), *Petrescu Viorel*, *Rogoz Ioan* (Lic. Milit, Timișoara), *Simeso Carol* (Polit., Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga Timișoara), *Tutor Aurel* (Lic. Milit., Făgăraș), *Vrânceanu Gheorghe* (Lic. Milit., Timișoara).

Problema 2241. — *Se cer patratele perfecte de forma $abcdab$ știind că $cd = 2ab$.*

LUCIAN MUNTEANU

Soluție. Fie $N^2 = abcdab$. Mai putem scrie

$$N^2 = 10^4 ab + 10^2 \times 2ab + ab = ab(10^4 + 210^2 + 1)$$

$$= ab(10^2 + 1)^2 = ab \cdot 101^2.$$

Avem prin urmare

$$N^2 = ab \times 10201. \tag{1}$$

Pentru ca membrul al 2-lea din (1) să fie un patrat perfect de 6 cifre, trebuie ca ab să fie un patrat perfect de două cifre, dar nu mai mare de cât 49, fiindcă prin enunț $cd = 2ab$, cd fiind de două cifre.

Putem deci lua pentru ab, patratele

16, 25, 36, 49.

Problema are deci următoarele 4 soluții

$$16 \times 10201 = (4 \times 101)^2 = 163216,$$

$$25 \times 10201 = (5 \times 101)^2 = 255025,$$

$$36 \times 10201 = (6 \times 101)^2 = 367236,$$

$$49 \times 10201 = (7 \times 101)^2 = 499849.$$

Soluții date de d-ra *Măran Ana* (Polit, Timișoara) și de d-nii: *Birănaș Ioan* (Arad), *Boerescu P. Gh.* (Cpt., Constanța), *Brașoveanu Gh.* (Craiova), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Costea D. Fl.* (Lic. Beiuș), *Filimon Ioan* (Lic., Milit., Timișoara), *Giurconiu Gh. Mihail* (Polit., Timișoara), *Grigore A. Gh*, *Mazilu M.*, *Miclea Ni-*

colae (Polit, Timişoara), *Popescu Barbu* (Lic Milit, Timişoara), *Rogoz Ioan* (Lic. Milit, Timişoara), *Stanciu A. Petru* (Polit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş), *Vrânceanu Gh.* Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Polit., Bucureşti).

Observare. D-l *Stanciu A. Petre* (Polit, Timişoara), observă că această problemă se găseşte sub formă de exerciţiu în „*Gazeta Matematică*", anul XXXIV, No. 1, *p.* 37 şi cred că autorul n'a avut cunoştinţă.

Problema 2269. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2(y-z) = \alpha^2 \\ \sin^2 y - \sin^2(z-x) = \beta^2 \\ \sin^2 z - \sin^2(x-y) = \gamma^2 \end{cases}$$

BARBU POPESCU

Soluţie. Avem succesiv următoarele transformări, care pentru prima ecuaţie sunt

$$\sin^2 x - \sin^2(y-z) = [\sin x + \sin(y-z)][\sin x - \sin(y-z)] =$$

$$2\sin\frac{x+y-z}{2}\cos\frac{x-y+z}{2}\cdot 2\sin\frac{x-y+z}{2}\cos\frac{x+y-z}{2}$$

$$= \sin(x+y-z)\sin(z+x-y) = \alpha^2.$$

Transformări analoage avem pentru celelalte ecuaţii, deci sistemul dat se mai poate scri

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin(x+y-z)\sin(z+x-y) = \alpha^2 \\ \sin(y+z-x)\sin(x+y-z) = \beta^2 \\ \sin(z+x-y)\sin(y+z-x) = \gamma^2. \end{cases}$$

Inmulţind aceste ecuaţii între ele şi extragând rădăcina patrată, obţinem

$$\sin(x+y-z)\sin(y+z-x)\sin(z+x-y) = \pm\alpha\beta\gamma.$$

Impărţind această ecuaţie, pe rând, cu ecuaţiile sistemului (1), obţinem

$$\begin{cases} \sin(y+z-x) = \pm\dfrac{\beta\gamma}{\alpha} \\ \sin(z+x-y) = \pm\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} \\ \sin(x+y-z) = \pm\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}. \end{cases}$$

Trecând la funcţiile inverse, avem

$$\begin{cases} y+z-x = \pm\arcsin\dfrac{\beta\gamma}{\alpha} \\ z+x-y = \pm\arcsin\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} \\ x+y-z = \pm\arcsin\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}. \end{cases}$$

Adunând câte două aceste ecuaţii, găsim

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\pm\arcsin\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} \pm \arcsin\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\pm\arcsin\dfrac{\alpha\beta}{\gamma} \pm \arcsin\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\right) \\ z = \dfrac{1}{2}\left(\pm\arcsin\dfrac{\beta\gamma}{\alpha} \pm \arcsin\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}\right), \end{cases}$$

care este sistemul de soluţii al sistemului dat.

Observare. O problemă analoagă este în „Culegere de Probleme de Trigonometrie", de *V. Cristescu*, Vol. I, p. 35.

Soluţii date de: *Denes R. Mariana* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic Brăila), *Gligor Ioan* (student, Timişoara), *London Emeric* (Polit, Timişoara), *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraş), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

Problema 2279. — *Să se stabilească identităţile*

$$\operatorname{cotg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{cotg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = 4\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2,$$

$$\operatorname{cotg}^3\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{cotg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+8\operatorname{tg}^3 2\alpha+6\operatorname{tg}2\alpha=0.$$

V. ALACI

Soluţie dată de d-l Gligor N. Ioan (student, Timişoara).

Ţinând seamă că

$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{cotg} 2x$$

şi că

$$\operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = -\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

avem:

$$1^0.\quad \operatorname{cotg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{cotg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\left[\operatorname{cotg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 +$$

$$2\operatorname{cotg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$4\operatorname{cotg}^2\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+2 = 4\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2.$$

Prima identitate este astfel stabilită.

$$2^0.\quad \operatorname{cotg}^3\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{cotg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\left[\operatorname{cotg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^3+$$

$$3\operatorname{cotg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\left[\operatorname{cotg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$8\operatorname{cotg}^3\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+6\operatorname{cotg}\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-8\operatorname{tg}^3 2\alpha-6\operatorname{tg}2\alpha,$$

deci

$$\operatorname{cotg}^3\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{cotg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+8\operatorname{tg}^3 2\alpha+6\operatorname{tg}2\alpha=0.$$

A 2-a identitate este şi ea astfel stabilită.

Soluţii analoage date de d-nii: *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Kinski Ion* (Polit., Timişoara).

Alte soluţii mai lungi date de, *Denes R. Mariana* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Grigore A Gheorghe*, *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraş), *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Serdeleanu Gh.* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

Soluţia autorului. Ecuaţia (1) $x^2+2(\operatorname{tg}2\alpha)x-1=0$, are rădăcinele

$$(1')\qquad x_1=\operatorname{cotg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),\quad x_2=\operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),$$

ceeace se constată cu uşurinţă, observând suma şi produsul rădăcinelor.

Acum, să reamintim, faptul cunoscut, că între rădăcinele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale ecuaţiei

$$x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n=0,$$

există relaţiile,

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=p_1^2-2p_2,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i^3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2-4p_4,\ldots$$

(Comberousse, Vol, II, p. 210).

Aplicând aceste relaţii ecuaţiei (1), în care avem

$$n=2,\ p_1=2\operatorname{tg}2\alpha,\ p_2=-1,\ p_3=p_4=\cdots=0,$$

(căci ecuaţia poate fi înmulţită cu x^k), avem

$$x_1^2+x_2^2=4\operatorname{tg}^2 2\alpha+2,$$

$$x_1^3+x_2^3=-8\operatorname{tg}^3 2\alpha-6\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$x_1^4+x_2^4=16\operatorname{tg}^4 2\alpha+24\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

Primele două din aceste relaţii sunt tocmai identităţile din enunţ, iar ultima şi altele analoage sunt stabilite foarte simplu pe această cale. De altfel, aceasta este metoda, cu orizont mai larg de aplicaţii, prin care am reuşit să stabilesc identităţile din enunţ.

Problema 2284. — *Să se determine numerele a şi b astfel ca ecuaţia ce se obţine anulând derivata funcţiei*

$$y=a\frac{1-x}{1+x}+\mathrm{L}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^b+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$$

să admită rădăcina $2+\sqrt{3}$. *Înlocuind a şi b cu valorile găsite, să se afle toate rădăcinile derivatei funcţiei date.* (L *înseamnă logaritm neperian*).

V. ALACI

Soluţie. Derivata ecuaţiei date este

$$y=a\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}+b\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{2}{(1+x)^2}\left[a+b\frac{1+x}{1-x}+\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right]=$$

$$-\frac{2}{(1+x)^2(1+x^2)}[a(1+x^2)(1-x)+b(1+x)(1+x^2)+(1-x^2)(1+x)].$$

Derivata egalată cu zero, în afară de rădăcina $x=\infty$, mai admite rădăcinile ecuaţiei

$$(1)\quad a(1+x^2)(1-x)+b(1+x)(1+x^2)+(1-x^2)(1+x)=0.$$

Prin ipoteză, această ecuaţie admite însă rădăcina $x=2+\sqrt{3}$, pe care înlocuind-o în (1), trebuie să obţinem un rezultat identic nul, trebuie deci să avem

$$a(8+4\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})+b(3+\sqrt{3})(8+4\sqrt{3})+$$
$$(-6-4\sqrt{3})(3+\sqrt{3})\equiv 0.$$

Efectuând calculele şi simplificând cu 2, obţinem

$$-10a+18b-15-(6a-10b+9)\sqrt{3}\equiv 0.$$

Coeficienţii a şi b fiind prin ipoteză numere raţionale, această relaţie pretinde să avem

$$\begin{cases}10a-18b=-15\\6a-10b=-9\end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, găsim

$$\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=0.\end{cases}$$

Înlocuind aceste valori în (1), avem ecuația

$$-\frac{3}{2}(1+x^2)(1-x)+(1-x^2)(1+x)=0$$

sau

$$(1-x)(x^2-4x+1)=0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt

$$(2)\qquad x_1=1,\quad x_2=2+\sqrt{3},\quad x_3=2-\sqrt{3},$$

iar rădăcinele derivatei funcției date, sunt acelea din șirul (2) la care se adaogă rădăcina $x_4=\infty$.

Soluții date de d-nii: *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Chesaru Cristea* (Polit., Timișoara), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic., Brăila), *Godea I.* (Polit, Timișoara), *Gottard Francisc* (Timișoara), *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraș), *Miclea Nicolae* (Polit., Timișoara), *Nedelcu Ulpius* (Lic. Milit., Timișoara), *Roth Rudolf Egon* (Polit, Timișoara), *Simcso Carol* (Polit, Timișoara) și *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraș).

PROBLEME PROPUSE

2337. — Se cere un număr A de m cifre, știind că scriindu-l de două ori unul după altul, obținem un multiplu al patratului lui.

GAVRIL F. CRETA

2338. — Într'un semicerc de centru O, împărțim raza $\overline{OU}$ în trei părți egale: $\overline{OI}=\overline{IJ}=\overline{JU}$. Perpendiculara în I pe rază taie cercul în A (și A'); AJ retaie cercul în B. B se proectează pe raza OU în K. Să se arate că

1°. $\overline{IA}$ este două treimi din latura patratului înscris.

2°. $\frac{\overline{JB}}{\overline{JA}}=\frac{5}{9}$, 3°. $\frac{\overline{KJ}}{\overline{KU}}=\frac{5}{4}$.

N. N. MIHAILEANU

2339. — Dacă punctele A, B, C, D sunt asezate pe rând pe o dreaptă, atunci avem

$$\overline{AD}(\overline{AB}+\overline{AC})=\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{BD}+2\,\overline{AB}.\overline{AC}$$

$$\overline{AD}(\overline{AC}+\overline{BD})=\overline{BD}.\overline{CD}+\overline{AB}.\overline{AC}+2\,\overline{BD}.\overline{AC}.$$

V. ALACI

2340. — Se consideră toate triunghiurile ABC, care au vârful A, ortocentrul H și piciorul A' al înălțimei AH fixe. Se cere să se găsească locurile geometrice ale intersecțiilor cercului ABC cu laturile triunghiului ortic al triunghiului ABC.

G-L GH. BUICLIU

2341. — Să se rezolve ecuația

$$sp^2x+cp^2x+Sp^2x+Cp^2x+\mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x=\frac{116}{3}.$$

CPT C. V. COSTACHESCU

2342. — Să se arate că

$$\begin{vmatrix} a^2-bc & c^2-ab & b_2-ac \\ b^2-ac & a^2-bc & c^2-ab \\ c^2-ab & b^2-ac & a^2-bc \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}.$$

MARIA NEUMANN

2343. — Fiind date funcțiile

$$I_k(x)=C_k^k\cos k\varphi+C_{k+1}^k x\cos(k+1)\varphi+$$

$$C_{k+2}^k x^2\cos(k+2)\varphi+\cdots+C_{n-1}^k x^{n-k-1}\cos(n-1)\varphi,$$

$$J_k(x)=C_k^k\sin k\varphi+C_{k+1}^k x\sin(k+1)\varphi+$$

$$C_{k+2}^k x^2\sin(k+2)\varphi+\cdots+C_{n-1}^k x^{n-k-1}\sin(n-1)\varphi,$$

să se arate că avem satisfăcute relațiile:

$$(1-2x\cos\varphi+x^2)I_k(x)=(\cos\varphi-x)I_{k-1}(x)-$$

$$\sin\varphi\,.\,J_{k-1}(x)\,C_n^k x^{n-k}[\cos n\varphi-x\cos(n-1)\varphi],$$

$$(1-2x\cos\varphi+x^2)J_k(x)=(\cos\varphi-x)J_{k-1}(x)+$$

$$\sin\varphi\,.\,I_{k-1}(x)-C_n^k x^{n-k}[\sin n\varphi-x\sin(n-1)\varphi].$$

EUGEN VISA

2344. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relația

$$Cp\frac{A}{2}Cp\frac{B}{2}-Cp\frac{B}{2}Cp\frac{C}{2}+Cp\frac{C}{2}Cp\frac{A}{2}=2\left(Cp\frac{A}{2}-1\right),$$

unde $Cp\,\alpha$ este cosecanta patratică a unghiului α.

PETRE F. IONESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Arnăutu Marin (2311, 2316, 2331, 2332); *Chesaru Cristea* (2120, 2174. 2272, 2314, 2316, 2318, 2325, 2332, 2335); *Chiria C-tin* (2209, 2233, 2234, 2257, 2261, 2264, 2265, 2267, 2271, 2273, 2276, 2281, 2288, 2289, 2290, 2293, 2296, 2298, 2299, 2300, 2311, 2312); *Costăchescu C V. C* (P.); *Goga Florian* (N.); *Macovei Eugen* (2316, 2325); *Mircea A. Gh.* (2317, 2332, 2335); *Meteş Mircea* (2305, 2312, 2314, 2316, 2330); *Munteanu Lucian* (P.); *Popa D. Vasile* (2236, 2244, 2252, 2284, 2290); *Stan Aurelian* (P); *Stroescu Florea* (2293, 2300, 2303, 2310, 2316, 2319); *Vlăduţ C-tin* (2309, 2311, 2312, 2316, 2325, 2331, 2332, 2335); *Wegener Eugen* (P.).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 100 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din ani II—XXIV, cu preţul de lei 1000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el. şi s'o iscălească.

ANUL XXV. AUGUST 1945 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** RELATII REMARCABILE INTR UN TRIUNGHIU.
2. NOTE MATEMATICE 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE : 2105, 2113, 2132, 2157, 2203, 2240, 2267, 2296.
5. PROBLEME PROPUSE: 2345 - 2352.
6 INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebue să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), este de 700 (șapte sute) lei. Un număr 80 lei.

Anunțăm cu plăcere că începând de la 15 August 1945 mai face parte printre membrii „*Revistei Matematice din Timișoara*" și D-l Maior *Iacob St. Eugen*, un vechiu și distins colaborator.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Politehnica, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Politehnica, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broșate, 1000 lei fiecare.

ANUL XXV — No. 6. TIMISOARA, AUGUST 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

RELAȚII REMARCABILE ÎNTR'UN TRIUNGHIU

DE

V. ALACI.

Putem stabili, printr'o metodă foarte simplă, noui relații remarcabile într'un triunghiu ABC folosind un triunghiu auxiliar $A_1B_1C_1$ și iată cum:

Definim întâi triunghiul auxiliar $A_1B_1C_1$, îi calculăm elementele (adică laturile, unghiurile, semiperimetru, suprafața, înălțimele, raza cercului circumscris și înscris, precum și razele cercurilor exinscrise, etc.) în funcție de elementele corespunzătoare ale triunghiu ABC și strângem toate aceste relații într'un tablou (T), numit tablou de transformare.

Odată format acest tablou (T), pornim de la orice relație cunoscută între elementele unui triunghiu oarecare pe care le scrim pentru triunghiul $A_1B_1C_1$ și în urmă înlocuim aceste elemente în funcție de elementele corespunzătoare ale triunghiului ABC, ținând seamă de formulele din tabloul (T), obținem în felul acesta noui relații remarcabile.

Definirea triunghiului auxiliar $A_1B_1C_1$ poate fi foarte variată, dar în acest articol precizăm acest triunghiu auxiliar așa cum urmează și formăm tabloul (T) corespunzător.

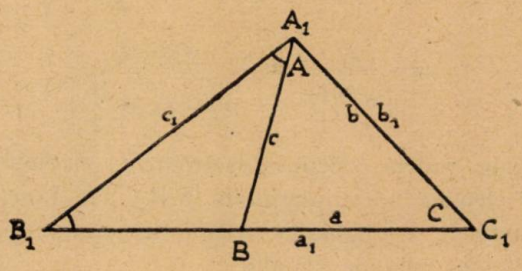
I.

Fie ABC un triunghiu oarecare, în care notațiile sunt cele obicinuite, căruia îi prelungim la stânga latura BC cu segmentul $BB_1=AB$ și obținem astfel triunghiul auxiliar $A_1B_1C_1$, ale cărui vârfuri A_1 și C_1 coincid respectiv cu A și C.

Acum, privind figura, observăm cu ușurință că,

$$B_1=\frac{B}{2},\quad C_1=C,\quad A_1=A+\frac{B}{2},$$

$$a_1=a+c=2p-b,\quad b_1=b,\quad c_1=\frac{c\sin B}{\sin\frac{B}{2}}=2c\cos\frac{B}{2}.$$



Mai observăm că,

$$2p_1=a_1+b_1+c_1=a+c+b+2c\cos\frac{B}{2}=$$

$$2p+2c\cos\frac{B}{2},$$

deci

$$p_1=p+c\cos\frac{B}{2},\qquad s_1=\frac{s(a+c)}{a}.$$

Avem încă,

$h_{a_1}=h_a$, iar din relațiile $2s_1=b_1h_{b_1}=c_1h_{c_1}$, deducem

$$h_{b_1}=\frac{2s_1}{b_1}=\frac{2s(a+c)}{ab}=\frac{h_b(a+c)}{a},\quad h_{c_1}=\frac{h_c(a+c)}{2a\cos\frac{B}{2}}.$$

Scrim apoi, în triunghiul $A_1B_1C_1$, relațiile cunoscute care dau razele R_1, r_1, r_{a_1}, r_{b_1}, r_{c_1} în funcție de laturi și unghiuri și înlocuim apoi aceste din urmă elemente, în funcție de elementele triunghiului ABC, avem

$$R_1=\frac{a_1b_1c_1}{4s_1}=\frac{2(a+c)bc\cos\frac{B}{2}}{4\frac{s(a+c)}{a}}=2R\cos\frac{B}{2},$$

$$r_1 = \frac{s_1}{p_1} = \frac{s(a+c)}{a\left(p + c\cos\frac{B}{2}\right)},$$

$$r_{a_1} = \frac{s_1}{p_1 - a_1} = \frac{s(a+c)}{a\left(p + c\cos\frac{B}{2} - a - c\right)} = \frac{s(a+c)}{a\left(b + c\cos\frac{B}{2} - p\right)},$$

$$r_{b_1} = \frac{s_1}{p_1 - b_1} = \frac{s(a+c)}{a\left(p + c\cos\frac{B}{2} - b\right)},$$

$$r_{c_1} = \frac{s_1}{p_1 - c_1} = \frac{s(a+c)}{a\left(p - c\cos\frac{B}{2}\right)}.$$

Analog putem calcula bisectoarele, medianele şi alte elemente ale triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcţie de elementele triunghiului ABC, dar ne mulţumim numai cu relaţiile stabilite.

Recapitulând formulele stabilite, avem tabloul:

(T)

$$a_1 = a + c = 2p - b, \quad b_1 = b, \quad c^1 = 2c\cos\frac{B}{2},$$

$$A_1 = A + \frac{B}{2}, \quad B_1 = \frac{B}{2}, \quad C_1 = C,$$

$$p_1 = p + c\cos\frac{B}{2}, \quad s_1 = \frac{s(a+c)}{a},$$

$$h_{a_1} = h_a, \quad h_{b_1} = \frac{h_b(a+c)}{a}, \quad h_{c_1} = \frac{h_c(a+c)}{2a\cos\frac{B}{2}},$$

$$R_1 = 2R\cos\frac{B}{2}, \quad r_1 = \frac{s(a+c)}{a\left(p + c\cos\frac{B}{2}\right)},$$

$$r_{a_1} = \frac{s(a+c)}{a\left(b + c\cos\frac{B}{2} - p\right)},$$

$$r_{b_1} = \frac{s(a+c)}{a\left(p - b + c\cos\frac{B}{2}\right)}, \quad r_{c_1} = \frac{s(a+c)}{a\left(p - c\cos\frac{B}{2}\right)}.$$

II.

Cu această pregatire, vom porni acum de la diferite relaţii cunoscute într'un triunghiu oarecare, pe care le vom scri pentru triunghiul $A_1B_1C_1$, înlocuind în urmă elementele ce intervin, prin valorile lor din tabloul (T), vom obţine astfel noui relaţii interesante (unele poate cunoscute), valabile pentru orice triunghiu oarecare ABC, relaţii care ar fi poate mai greu de stabilit pe cale directă.

1°. Considerăm întâi relaţiile cele mai simple, pe care le aplicăm în triunghiul $A_1B_1C_1$, anume:

(1) $$\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{b_1}{\sin B_1} = \frac{c_1}{\sin C_1} = 2R_1,$$

(2) $$a_1 = b_1\cos C_1 + c_1\cos B_1,$$

(3) $$a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos A_1,$$

(4) $$\operatorname{tg}\frac{A_1 - B_1}{2} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}\operatorname{cotg}\frac{C_1}{2},$$

(5) $$\operatorname{tg}\frac{B_1 - C_1}{2} = \frac{b_1 - c_1}{b_1 + c_1}\operatorname{cotg}\frac{A_1}{2}.$$

Înlocuind, în aceste relaţii, elementele triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcţie de elementele triunghiului ABC, date în tabloul (T), obţinem respectiv, după unele simplificări:

(1′) $$\boxed{\frac{a+c}{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)} = \frac{b}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{2c\cos\frac{B}{2}}{\sin C} = 4R\cos\frac{B}{2}},$$

(2′) $$\boxed{a + c = b\cos C + 2c\cos^2\frac{B}{2}},$$

(3′) $$\boxed{p(p-b) = c\cos\frac{B}{2}\left[c\cos\frac{B}{2} - b\cos\left(B + \frac{A}{2}\right)\right]},$$

(4′) $$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{p-b}{p}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}},$$

(5′) $$\boxed{\operatorname{tg}\frac{B-2C}{4} = \frac{b - 2c\cos\frac{B}{2}}{b + 2c\cos\frac{B}{2}}\operatorname{tg}\frac{B+2C}{4}}.$$

2°. De asemeni, să considerăm şi următoarele relaţii cunoscute într'un triunghiu oarecare $A_1B_1C_1$

(Compléments de Trigonométrie, par „*F. G. M*“ şi Culegere de Probleme de *V. Cristescu*), anume:

$$(6)\qquad \sin\frac{B_1-C_1}{2}=\frac{b_1-c_1}{a_1}\cos\frac{A_1}{2},$$

$$(7)\qquad \cos\frac{B_1-C_1}{2}=\frac{b_1+c_1}{a_1}\sin\frac{A_1}{2},$$

$$(8)\qquad b_1\cos C_1-c_1\cos B_1=\frac{b_1^2-c_1^2}{a_1},$$

$$(9)\qquad b_1\cos B_1+c_1\cos C_1=a_1\cos(B_1-C_1),$$

$$(10)\qquad \frac{\sin(A_1-B_1)}{\sin(A_1+B_1)}=\frac{a_1^2-b_1^2}{c_1^2},$$

$$(11)\qquad a_1\sin(B_1-C_1)+b_1\sin(C_1-A_1)+c_1\sin(A_1-B_1)=0,$$

$$(12)\qquad \frac{a_1^2\sin(B_1-C_1)}{\sin A_1}+\frac{b_1^2\sin(C_1-A_1)}{\sin B_1}+\frac{c_1^2\sin(A_1-B_1)}{\sin C_1}=0,$$

$$(13)\qquad \frac{a_1\sin\frac{B_1-C_1}{2}}{\sin\frac{A_1}{2}}+\frac{b_1\sin\frac{C_1-A_1}{2}}{\sin\frac{B_1}{2}}+\frac{c_1\sin\frac{A_1-B_1}{2}}{\sin\frac{C_1}{2}}=0,$$

$$(14)\qquad b_1\cos^2\frac{C_1}{2}+c_1\cos^2\frac{B_1}{2}=p_1,$$

$$(15)\qquad b_1\sin^2\frac{C_1}{2}+c_1\sin^2\frac{B_1}{2}=p_1-a_1,$$

$$(16)\qquad \frac{a_1\sin\frac{B_1-C_1}{2}}{\cos\frac{A_1}{2}}+\frac{b_1\sin\frac{C_1-A_1}{2}}{\cos\frac{B_1}{2}}+\frac{c_1\sin\frac{A_1-B_1}{2}}{\cos\frac{B_1}{2}}=0,$$

$$(17)\qquad 1+\cos A_1\cos(B_1-C_1)=\frac{b_1^2+c_1^2}{4R_1^2},$$

$$(18)\qquad r_{a_1}=r_1\operatorname{cotg}\frac{B_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{C_1}{2},$$

$$(19)\qquad r_1=\frac{h_{a_1}\sin\frac{A_1}{2}}{2\cos\frac{B_1}{2}\cos\frac{C_1}{2}},$$

$$(20)\qquad (a_1+c_1)\operatorname{tg}\frac{B_1}{2}+(a_1-c_1)\operatorname{cotg}\frac{B_1}{2}=2c_1\operatorname{cotg}C_1.$$

Aceste relaţii, în virtutea formulelor din tabloul (T), se transformă, respectiv, după unele simplificări, în următoarele relaţii remarcabile, valabile în orice triunghiu ABC:

$$(6')\qquad \boxed{\sin\frac{B-2C}{4}=\frac{b-2c\cos\frac{B}{2}}{a+c}\cos\frac{B+2A}{4}},$$

$$(7')\qquad \boxed{\cos\frac{B-2C}{4}=\frac{b+2c\cos\frac{B}{2}}{a+c}\cos\frac{B+2A}{4}},$$

$$(8')\qquad \boxed{b\cos C-2c\cos^2\frac{B}{2}=\frac{b^2-4c^2\cos^2\frac{B}{2}}{a+c}},$$

$$(9')\qquad \boxed{(b+2c\cos C)\cos\frac{B}{2}=(a+c\cos\left(\frac{B}{2}-C\right)},$$

$$(10')\qquad \boxed{\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{p(p-b)}{c^2\cos^2\frac{B}{2}}},$$

$$(11')\qquad \boxed{(a+c)\sin\frac{B-2C}{2}-b\cos\frac{3C-A}{2}+2c\cos\frac{B}{2}\sin A=0},$$

$$(12')\qquad \boxed{\frac{(a+c)^2\sin\frac{B-2C}{2}}{\sin\frac{B+2C}{2}}-\frac{b^2\cos\frac{3C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{4c^2\cos^2\frac{B}{2}\sin A}{\sin C}=0},$$

$$(13')\qquad \boxed{\frac{(a+c)\sin\frac{B-2C}{2}}{\sin\frac{B+2A}{4}}-\frac{b\cos\frac{B+4C}{4}}{\sin\frac{B}{4}}+\frac{2c\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=0},$$

$$(14')\qquad \boxed{b\cos^2\frac{C}{2}+2c\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}=p+c\cos\frac{B}{2}},$$

$$(15')\quad b\sin^2\frac{C}{2}+2c\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}=b-p+c\cos\frac{B}{2},$$

$$(16')\quad \frac{(a+c)\sin\frac{B-2C}{2}}{\cos\frac{B+2A}{4}}-\frac{b\cos\frac{B+4C}{4}}{\cos\frac{B}{4}}+\frac{2c\cos\frac{B}{4}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=0,$$

$$(17')\quad 1+\cos\left(A+\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}-C\right)=\frac{b^2+4c^2\cos^2\frac{B}{2}}{16R^2\cos^2\frac{B}{2}},$$

$$(18')\quad \frac{p+c\cos\frac{B}{2}}{b+c\cos\frac{B}{2}-p}=\operatorname{cotg}\frac{B}{4}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$$(19')\quad \frac{a+c}{p+c\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin\frac{B+2A}{4}}{\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{2}},$$

$$(20')\quad \left(a+c+2c\cos\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\left(a+c-2c\cos\frac{B}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{B}{4}=4c\cos\frac{B}{2}\operatorname{cotg}C.$$

III.

Dacă acum luăm oricare din relațiile stabilite (1'), (2'), ..., (20'), o aplicăm triunghiului $A_1B_1C_1$ și în urmă înlocuim elementele ce figurează, în funcție de elementele triunghiului ABC, conform formulelor din tabloul (T), obținem alte noui relații remarcabile.

Dacă procedăm în felul acesta, de exemplu, pentru relațiile (1'), (2'), (4'), (5'), (6'), (8'), (9'), (14'), (17') și (19'), obținem încă următoarele noui relații interesante, valabile în orice triunghiu ABC, anume:

$$(1'')\quad \frac{a+c+2c\cos\frac{B}{2}}{\sin\left(A+\frac{3B}{4}\right)}=8R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4},$$

$$(2'')\quad a+c+2c\cos\frac{B}{2}=b\cos C+4c\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4},$$

$$(4'')\quad \operatorname{tg}\frac{B+2A}{4}=\frac{p-b+c\cos\frac{B}{2}}{p+c\cos\frac{B}{2}}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$$(5'')\quad \operatorname{tg}\frac{B-4C}{8}=\frac{b-4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}}{b+4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}}\operatorname{tg}\frac{B+4C}{8},$$

$$(6'')\quad \sin\frac{B-4C}{8}=\frac{b-4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}}{a+c+2c\cos\frac{B}{2}}\cos\frac{4A+3B}{8},$$

$$(8'')\quad b\cos C-4c\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}=\frac{b^2-16c^2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}}{a+c+2c\cos\frac{B}{2}},$$

$$(9'')\quad \left(b+4c\cos\frac{B}{2}\cos C\right)\cos\frac{B}{4}=\left(a+c+2c\cos\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{4}-C\right),$$

$$(14'')\quad b\cos^2\frac{C}{2}+4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cos^2\frac{B}{8}=p+c\cos\frac{B}{2}+2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4},$$

$$(17'')\quad 1+\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)\cos\left(\frac{B}{4}-C\right)=\frac{b^2+16c^2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}}{64R^2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}},$$

$$(19'') \qquad \frac{a+c+2c\cos\frac{B}{2}}{p+c\cos\frac{B}{2}+2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}} = \frac{\sin\frac{4A+3B}{8}}{\cos\frac{B}{8}\cos\frac{C}{2}},$$

Putem folosi, evident, de oricâte ori această metodă de iterare, oricărei relații valabilă într'un triunghiu și obținem o altă nouă relație. De exemplu, relația (17″) iterată de încă $(n-2)$ ori devine următoare relație remarcabilă

$$(17''') \qquad \frac{1+\cos\left[A+\frac{(2^n-1)B}{2^n}\right]\cos\left(\frac{B}{2^n}-C\right)=}{\frac{b^2+4^n\left(c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cdots\cos\frac{B}{2^n}\right)^2}{4^{n+1}\left(R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\ldots\cos\frac{B}{2^n}\right)^2}}.$$

Vom publica ca probleme propuse unele din aceste relații, asteptând de la corespondenții noștrii soluții directe.

NOTE MATEMATICE

13. — *Asupra unei probleme de construcție.*

Imi propun a da în cele de mai jos o metodă inedită pentru rezolvarea următoarei probleme de construcție:

Printr'un punct dat, situat în planul a două drepte concurente, al căror punct de concurență este însă inaccesibil, să se ducă o a treia dreaptă care să treacă și ea prin acest punct de concurență inaccesibil al primelor două.

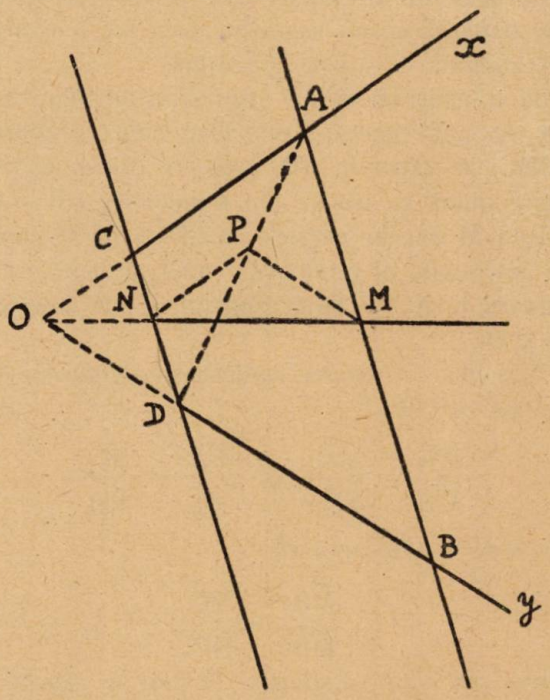
Fie Ox și Oy cele două drepte concurente și M punctul dat. Tăiem cele două drepte concurente prin două paralele, dintre cari, una să treacă prin M, celalaltă putând fi eventual chiar marginea desenului.

Fie A și B punctele în cari dreapta dusă prin M taie respectiv pe Ox și Oy. Fie deasemenea C și D punctele în care paralela dreptei precedente taie respectiv aceleași drepte concurente, Ox și Oy.

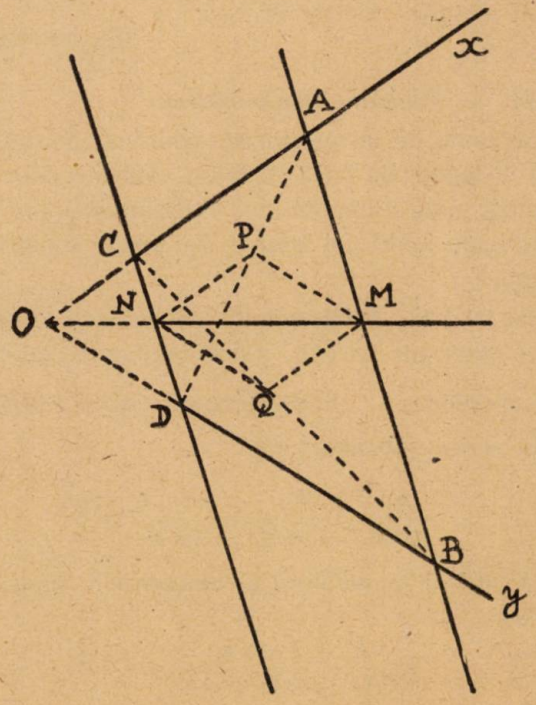
Prin ipoteză deci

$$AB \parallel CD.$$

În baza unei teoreme cunoscute, problema revine astfel la determinarea unui punct N pe CD, care să împartă acest segment în același raport în care punctul M împarte segmentul AB, dreapta MN trecând atunci cu necesitate prin punctul O și fiind prin urmare tocmai dreapta a cărei construcție se cere



Cu alte cuvinte, punctul N trebue astfel determinat, încât să avem:



$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{ND}}.$$

Se ştie însă că un segment de dreaptă se împarte uşor într'un raport egal cu raportul în care este împărţit un alt segment, dacă are o extremitate comună cu acesta din urmă.

Să considerăm atunci segmentul auxiliar constituit de una oarecare din diagonalele trapezului ABDC, de exemplu AD, care are câte o extremitate comună cu fiecare din segmentele AB şi CD.

Prin M ducem paralela la BD şi fie P punctul de intersecţie al ei cu AD, apoi prin P ducem paralela la AC şi fie N punctul ei de intersecţie cu CD.

Teorema lui *Thales*, aplicată triunghiurilor ABD şi ADC ne dă:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} \text{ şi } \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{ND}},$$

de unde rezultă apoi că

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{ND}},$$

ceeace ne arată că punctul N este în adevăr cel căutat, dreapta MN trecând, după cum am precizat şi mai sus, prin punctul de concurenţă inaccesibil O al dreptelor Ox şi Oy.

EUGEN VISA

---

14 — *Relaţiuni trigonometrice.*

Servindu-ne de proprietăţi cunoscute din aritmetică şi luând de bază relaţiuni evidente între elementele unui triunghiu, putem căpăta relaţiuni deja cunoscute mult mai simplu sau putem stabili noui relaţiuni.

Fie h'_a, h'_b, h'_c porţiunile de înălţimi cuprinse între ortocentru şi vârf. Avem relaţiunile cunoscute

$$h'_a = 2R\cos A, \quad h'_b = 2R\cos B, \quad h'_c = 2R\cos C.$$

Sau scrise sub altă formă

$$(1) \qquad \frac{h'_a}{\cos A} = \frac{h'_b}{\cos B} = \frac{h'_c}{\cos C} = 2R.$$

Adunând numărătorii şi numitorii în parte, obţinem

$$\frac{h'_a + h'_b + h'_c}{\cos A + \cos B + \cos C} = 2R.$$

De unde se deduce

$$(2) \qquad h'_a + h'_b + h'_c = 2(R + r).$$

La fel obţin

$$(3) \quad \frac{h'_a + h'_b - h'_c}{\cos A + \cos B - \cos C} = \frac{h'_a - h'_b + h'_c}{\cos A - \cos B + \cos C}$$

dar

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdots$$

şi

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r_c}{R}\cdots$$

Ţinând seamă de aceste relaţiuni şi analoagele lor, egalităţile din (3), se pot scrie

$$(3') \quad \frac{h'_a + h'_b - h'_c}{r_c - R} = \frac{h'_a - h'_b + h'_c}{r_b - R} = \frac{-h'_a + h'_b + h'_c}{r_a - R} = 2.$$

Înmulţind şi împărţind în acelaş timp, fiecare egalitate de mai sus cu $(h'_a + h'_b + h'_c)$ şi ţinând seamă de relaţia (2), avem

$$(4) \quad \frac{(h'_a + h'_b)^2 - h'^2_c}{r_c - R} = \frac{(h'_a + h'_c)^2 - h'^2_b}{r_b - R} = \frac{(h'_b + h'_c)^2 - h'^2_a}{r_a - R} = 4(R + r).$$

În egalităţile (3'), adunând câte doi numărătorii şi numitorii în parte, obţinem

$$(5) \quad \frac{h'_a}{r_b + r_c - 2R} = \frac{h'_b}{r_a + r_c - 2R} = \frac{h'_c}{r_a + r_b - 2R} = 1.$$

Scăzând câte doi numărătorii şi numitorii fracţiilor, avem

$$(6) \quad \frac{h'_b - h'_c}{r_c - r_b} = \frac{h'_c - h'_a}{r_a - r_c} = \frac{h'_a - h'_b}{r_b - r_a} = 1.$$

Din relaţia (5) deducem şi următoarele relaţii

$$(7) \quad \frac{h'_b + h'_c}{r + r_a} = \frac{h'_c + h'_a}{r + r_b} = \frac{h'_a + h'_b}{r + r_c} = 1.$$

Tot din această relaţie, avem

$h'_a = r_b + r_c - 2R$... de unde $r_b + r_c = 2R - h'_a$...

Înmulţindu-le respectiv cu

$$2R + h'_a, \quad 2R + h'_b, \quad 2R + h'_c,$$

avem

$$2R(r_b+r_c-2R)=h'_a(r_b+r_c-h'_a),$$
$$2R(r_c+r_a-2R)=h'_b(r_c+r_a-h'_b),$$
$$2R(r_a+r_b-2R)=h'_c(r_a+r_b-h'_c),$$

sau

$$\frac{r_b+r_c-2R}{r_b+r_c-h'_a}+\frac{r_c+r_a-2R}{r_c+r_a-h'_a}+\frac{r_a+r_b-2R}{r_a+r_b-h'_c}$$
$$=\frac{1}{2R}(h'_a+h'_b+h'_c).$$

Ţinând seamă de relaţia (2), avem

$$(8)\qquad \frac{r_b+r_c-2R}{r_b+r_c-h'_a}+\frac{r_c+r_a-2R}{r_b+r_a-h'_b}+$$
$$\frac{r_a+r_b-2R}{r_a+r_b-h'_c}=\frac{r}{R}+1.$$

Din relaţia (7), deducem

$$h'_b+h'_c=r+r_a,\quad h'_c+h'_a=r+r_b,\quad h'_a+h'_b=r+r_c.$$

Înmulţind ambii membri respectiv cu

$$r-r_a,\quad r-r_b,\quad r-r_c,$$

avem

$$r(h'_b+h'_c-r)=r_a(h'_b+h'_c-r_a),$$
$$r(h'_c+h'_a-r)=r_a(h'_c+h'_a-r_b),$$
$$r(h'_a+h'_b-r)=r_c\,h'_a+h'_b-r_c),$$

sau

$$\frac{h'_b+h'_c-r_a}{h'_b+h'_c-r}+\frac{h'_c+h'_a-r_b}{h'_c+h'_a-r}+\frac{h'_a+h'_b-r_c}{h'_a+h'_b-r}$$
$$=r\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right),$$

cum însă

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

rezultă că

$$(9)\qquad \frac{h'_b+h'_c-r_a}{h'_b+h'_c-r}+\frac{h'_c+h'_a-r_b}{h'_c+h'_a-r}+\frac{h'_a+h'_b-r_c}{h'_a+h'_b-r}=1.$$

Procedând ca mai sus, adică servindu-ne de proprietăţi cunoscute din aritmetică şi luând de bază alte elemente dintr'un triunghiu, obţinem la fel relaţiuni noui şi destul de interesante.

LT. MIRCEA GRUMAZESCU

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică, Anul L, No 11, Iulie 1945.

Informaţiuni cu privire la Semicentenarul „*Gazetei Matematice*“ de *Al. Bunescu*, *Serb Gheorghiu*, *P. Sergescu*. In legătură cu problema 4516 şi 5769, de *Petre Boldescu*. Asupra inegalităţilor dintre valorile medii, de *Mircea Adam*.

Raport asupra premiului *Gh. Ţiţeica*, de *Gabriela Ţiţeica*, Prof. *O. N Ţino*, Prof. *P. Sergescu*. Note matematice, Probleme rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2105. — *Să se stabilească identitatea*

$$\prod_{k=0}^{2}\sin^2\left[\frac{(2k+1)\pi}{6}+x\right]+\prod_{k=0}^{2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{3}+x\right)=2^{-4}.$$

V. ALACI

Soluţie. Însemnând prin E primul membru şi dezvoltând unii factori conform unor formule obicinuit cunoscute, putem scri succesiv

$$E=\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\frac{5\pi}{6}\right]^2+\left[\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\right]^2$$
$$=[\cos x\,.\,\sin(30^0+x)\sin 30-x)]^2+[\sin x\,.\,\sin(60^0+x)\sin(60^0-x)]^2$$
$$=\cos^2x\left(\frac{\cos x}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin x}{2}\right)^2\left(\frac{\cos x}{2}-\frac{\sqrt{3}\sin x}{2}\right)^2+\sin^2x\left(\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}+\frac{\sin x}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\cos^2x(\cos^2x-3\sin^2x)^2+\sin^2x(3\cos^2x-\sin^2x^2}{16}=\frac{\cos^2x(1-4\sin^2x)^2+\sin^2x(4\cos^2x-1)^2}{16}$$
$$=\frac{\cos^2x+\sin^2x-8\sin^2x\cos^2x+16\sin^4x\cos^2x+16\sin^2x\cos^4x-8\sin^2x\cos^2x}{2^4}$$
$$=\frac{1-16\sin^2x\cos^2x+16\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)}{2^4}=2^{-4}.$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Muțiu Antim* (Polit., Timișoara), *Pat Moise* (Polit., Timișoara) și *Țigănoiu Al.* (Polit., Timișoara).

Problema 2113. — *Intr'un triunghiu* ABC *avem relația*

$$c^3\cos^3 B \sin 3B + h^3 \cos 3B = 3c^3 h \cos B \cos 2B,$$

unde h este înălțimea din A, *celelalte notații fiind cele obicinuite.*

V. ALACI

Soluție. Însemnăm cu E primul membru al relației cerute și ținând seamă de formulele cunoscute

$$\sin 3B = 3\sin B - 4\sin^3 B, \quad \cos 3B = 4\cos^3 B - 3\cos B$$

$$h = c \sin B, \quad \cos^2 B - \sin^2 B = \cos 2B,$$

putem scri succesiv

$$E = c^3\cos^3 B(3\sin B - 4\sin^3 B) + h^3(4\cos^3 B - 3\cos B)$$

$$= 3c^2(c\sin B)\cos^3 B - 4(c\sin B)^3\cos^3 B +$$

$$4h^3\cos^3 B - 3(c\sin B)^2 h\cos B$$

$$= 3c^2 h\cos^3 B - 4h^3\cos^3 B + 4h^3\cos^3 B - 3c^2 h\sin^2 B\cos B$$

$$= 3c^2 h\cos B(\cos^2 B - \sin^2 B) = 3c^2 h\cos B\cos^2 B.$$

Avem astfel stabilită relația cerută.

Soluții bune date de d-ra *Tarța Valeria* (Polit., Timișoara) și de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Chiriac C-tin*, *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timișoara), *Gâță Gheorghe* (Lic. Tg-Jiu), *Gheorghiu Octav* (Lic. Internat, Iași), *Godea I.* (Polit., Timișora), *Grozescu Liviu* (Polit., Timișoara), *Ionescu Petre* (Craiova), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Muțiu Antim* (Polit, Timișoara), *Păltăceanu Vasile* (Lic. Milit, Timișoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timișoara), *Șipoș Eugen* (Polit, Timișoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timișoara), *Stretea Alexandru* (Polit, Timișora), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara) și *Wegener Eugen* (Polit, București).

Altă soluție. D-l *Bitang Alexandru* (Polit, Timișoara) folosind cunoștințele cuprinse într'un articol din „R. M. T."[1], a dat următoarea soluție: Fie ABC un triunghiu, $AM = h$ înălțimea, iar x și y numere complexe corespunzătoare lui AB și BM. Atunci, latura vector AM din triunghiul dreptunghic format ABM, este reprezentată prin numărul complex, $x+y$. Exprimând, pe $\overline{AB}$, $\overline{BM}$, $\overline{AM}$, în funcție de modul și argument, luând pe AB ca axă, avem

$$(1) \qquad x = c, \quad y = |y| e^{i(\pi - B)} = -c\cos B\, e^{-iB},$$

$$x + y = h e^{i\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

[1]) *V. Alaci*: Relații remarcabile într'un triunghiu „R M.T", vol, XXIII, p 87 – 91.

Dacă acum în identitatea

$$y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) - x^3,$$

ținem seamă de relațiile (1), avem

$$-c^3\cos^3 B e^{-3iB} = h^3 e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - 3B\right)} + 3c^2 h\cos B\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2B\right)} - c^3,$$

relație care desvoltată ne dă

$$-c^3\cos^3 B\cos 3B + ic^3\cos^3 B\sin 3B =$$

$$h^3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3B\right) + ih^3\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3B\right) +$$

$$3c^2 h\cos B\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2B\right) +$$

$$3ic^2 h\cos B\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2B\right) - c^3.$$

Egalând întâi coeficienții părților imaginare și apoi a părților reale, obținem

$$c^3\cos^3 B\sin 3B + h^3\cos 3B = 3c^2 h\cos B\cos 2B$$

$$c^3 = c^3\cos^3 B\cos 3B - h^3\sin 3B + 3c^2 h\cos B\sin 2B.$$

Prima din aceste relații este acea cerută.

Problema 2132. — *Să se rezolve ecuația*

$$x^4 + 4x^2 - 8x + 6 = 0.$$

I. V. MATIES

Soluție dată de d-nii: Creța F. Gavril (Polit., Timișoara) și *Enache Ion* (Lt).

Ecuația dată se mai poate scri

$$x^4 - 4x^2 + 4 + (8x^2 - 8x + 2) = 0,$$

sau

$$(x^2 - 2)^2 + 2(2x - 1)^2 = (x^2 - 2)^2 - 2i^2(2x - 1)^2 = 0,$$

$$i = \sqrt{-1},$$

care descompusă în factori ne dă

$$[x^2 - 2 + i\sqrt{2}(2x - 1)][x^2 - 2 - i\sqrt{2}(2x - 1)] = 0.$$

De aci deducem

$$x^2 + 2i\sqrt{2}x - 2 - i\sqrt{2} = 0,$$

$$x^2 - 2i\sqrt{2}x - 2 + i\sqrt{2} = 0,$$

Rezolvind aceste două ecuații de gradul al 2-lea, obținem respectiv

$$x_{1,2} = -i\sqrt{2} \pm \sqrt{i\sqrt{2}},$$

$$x_{3,4} = i\sqrt{2} \pm \sqrt{-i\sqrt{2}}.$$

Alte soluţii date de d-nii : *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Brăila), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Păläceanu Vasile* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Polit., Bucureşti).

Observare. Autorul a dat o soluţie bazat pe articolul D-sale din *„Gazeta Matematică“*, Anul XLV, *p* 565, întitulat: *Contribuţiuni la rezolvarea ecuaţiei de gradul patru.* Tot o astfel de soluţie a dat şi d-l *Cârnaţiu Ion* (Lic. Blaj).

Problema 2157. — *Să se afle aria şi volumul solidului obţinut prin reunirea celor două conuri circulare drepte de rază r ce se pot înscrie într'o sferă de rază* R.

Aplicaţie: R = 9 cm, *r* = 7 cm.

EUGEN VISA

Soluţie. Fie O centrul sferei de rază R şi C centrul cercului de rază *r* situat pe această sferă care serveşte ca bază comună celor două conuri definite prin enunţiul problemei. Fie încă S_1 şi S_2 vârfurile acestor două conuri şi M un punct oarecare al cercului C(*r*).

Notând prin G_1 generatoarea conului cu vârful în S_1 şi prin G_2 aceea a conului cu vârful în S_2, aria solidului pe care îl formează aceste două conuri reunite este

$$S = \pi r (G_1 + G_2).$$

Cum însă, în triunghiul dreptunghic S_1MS_2, în care $S_1M = G_1$, $S_1M = G_2$, $S_1S_2 = 2R$ şi $CM = r$, avem relaţiile

$$G_1^2 + G_2^2 = 4R^2, \qquad G_1 G_2 = 2Rr,$$

din cari rezultă apoi relaţia

$$G_1 + G_2 = 2\sqrt{R(R+r)},$$

formula de mai sus devine

$$\boxed{S = 2\pi r \sqrt{R(R+r)}}, \tag{1}$$

În mod analog, dacă notăm prin I_1 înălţimea conului cu vârful în S_1, iar prin I_2 aceea a conului cu vârful în S_2 şi observăm că

$$I_1 + I_2 = 2R,$$

deducem formula volumului solidului format prin reunirea acestor două conuri şi anume

$$\boxed{V = \frac{2\pi R r^2}{3}}. \tag{2}$$

Aplicaţie. Pentru R = 9 cm şi *r* = 7 cm, formulele (1) şi (2) ne dau respectiv

$$S = 168\pi \text{ cm}^2 \text{ şi } V = 294\pi \text{ cm}^3.$$

Soluţie dată de d-ra *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Birănaş Ioan* (Lic. Brad), *Bolcaş Victor* (Beiuş), *Cicerean Gh* (Polit., Timişoara), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Lic. Brăila), *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Malita Mircea* (Lic. Beiuş) *Marinescu N.*, *Mazilu Marius* (Lic. Caransebeş), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit. Timişoara), *Păläceanu Vasile* (Lic Milit., Timişoara), *Pleşcan Ion* (Lic Tulcea), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Sabău Gh. Mihai* (Polit, Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Ştefănescu M.* (Lt), *Stretea Alexandru* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Polit., Bucureşti).

Problema 2203. — *Să se afle, pentru* $x=y=z=1$, *adevărata valoare a expresiei*

$$E = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma xy - 6}{\Sigma x^2 - 3},$$

ştiind că între x, y, z avem relaţiile

$$\begin{cases} 4x - 3y - z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0. \end{cases}$$

AL. TIGANOIU

Soluţie. Observăm că pentru $x = y = z = 1$, expresia E ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ şi că pentru aceste valori ale variabilelor relaţiile date sunt satisfăcute. Putem deci încadra chestiunea în studiul expus într'un articol din „R. M. T.“ [1], unde avem stabilită regula:

Adevărata valoare a unei expresii

$$u = \frac{f(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)},$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ *soluţii ale sistemului*

$$\begin{cases} A(x, y, z) = 0 \\ B(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

este câtul între determinanţii funcţionali ai funcţiilor $f(x, y, z)$, $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ şi $\varphi(x, y, z)$, $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, *adică*

$$u = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}},$$

[1]) *V. Alaci*: O clasă de expresii nedeterminate „R. M. T.“, Vol. IV, p. 20.

pentru $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, *când această valoare este determinată.*

În virtutea acestei reguli, *rezultă că adevărata valoare a expresiei* E *pentru* $x=y=z=1$, *soluții ale sistemului din enunț, este*

$$E=\left[\frac{\begin{vmatrix} 2x+y+z & 2y+z+x & 2z+x+y \\ 4 & -3 & -1 \\ 2x & 2y & -4z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4 & -3 & -1 \\ 2x & 2y & -4z \end{vmatrix}}\right]_{x=y=z=1}=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}}=2\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}=2.$$

Adevărată valoare a expresiei E este astfel

$$E=2.$$

Soluții date de d-rele *Măran Ana* (Polit., Timișoara) *Tarța Valeria* (Polit, Timișoara) și de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timișoara) și *Goldis Gh.* (Polit., Timișoara).

Observare. S'au primit multe soluții eronate, autorii necunoscând teoria pe care am folosit'o în tratarea problemei.

Problema 2240. — *Să se demonstreze că în orice triunghiu avem relațiile*

$$cp\frac{A}{4}cp\frac{B+C}{4}+cp\frac{B}{4}cp\frac{C+A}{4}+cp\frac{C}{4}cp\frac{A+B}{4}=\frac{3}{2},$$

$$8cp\frac{A}{4}cp\frac{B}{4}cp\frac{C}{4}=Sp\frac{A+B}{4}Sp\frac{B+C}{4}Sp\frac{C+A}{4}.$$

MARCEL D. COTARIU

Prima soluție. În „*Trigonometria patratică*", p. 71, avem:

Dacă $\alpha+\beta=45^0$, atunci

$$(1)\qquad 2\,cp\,\alpha\,cp\,\beta=1.$$

Cum între unghiurile triunghiului ABC, avem relația

$$\frac{A}{4}+\frac{B+C}{4}=45^0,$$

rezultă conform relației (1),

$$(2)\qquad 2\,cp\frac{A}{4}cp\frac{B+C}{4}=1$$

și analog avem

$$(3)\qquad 2\,cp\frac{B}{4}cp\frac{C+A}{4}=1,$$

$$(4)\qquad 2\,cp\frac{C}{4}cp\frac{A+B}{4}=1.$$

Adunând relațiile (2), (3) și (4), obținem împărțind prin 2,

$$cp\frac{A}{4}cp\frac{B+C}{4}+cp\frac{B}{4}cp\frac{C+A}{4}+cp\frac{C}{4}cp\frac{A+B}{4}=\frac{3}{2},$$

care este prima relație cerută.

Pentru a stabili a 2-*a* relație, înmulțim relațiile (2), (3) și (4) și găsim

$$8\,cp\frac{A}{4}cp\frac{B}{4}cp\frac{C}{4}cp\frac{B+C}{4}cp\frac{C+A}{4}cp\frac{A+B}{4}=1,$$

sau

$$(5)\qquad 8\,cp\frac{A}{4}cp\frac{B}{4}cp\frac{C}{4}=\frac{1}{cp\frac{B+C}{4}cp\frac{C+A}{4}cp\frac{A+B}{4}}.$$

Cum din formulele fundamentale ale „*Trigonometriei patratice*" avem

$$\frac{1}{cp\,\alpha}=Sp\,\alpha,$$

relația (5) devine

$$8\,cp\frac{A}{4}cp\frac{B}{4}cp\frac{C}{4}=Sp\frac{B+C}{4}Sp\frac{C+A}{4}Sp\frac{A+B}{4}$$

A 2-a relație este astfel și ea stabilită

Soluții foarte bune date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Brasch Andrei* (Polit., Timișoara), *Chesaru Cristea* (Polit,. Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara) și *Wegener Eugen* (București)

Soluția 2-a. Conform formulelor din tabloul (11), „*Trigonometria patratică*" p. 11, putem scri

$$(1)\qquad cp\frac{A}{4}cp\frac{B+C}{4}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{B+C}{4}}.$$

Cum

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{4}=\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{A}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}},$$

relația (1) devine

$$cp\frac{A}{4}cp\frac{B+C}{4}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}}}=\frac{1}{2}.$$

Rezultă atunci

$$\sum cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B+C}{4}=\frac{3}{2}.$$

Astfel prima relaţie este stabilită.

Pentru a stabili a 2-a relaţie, plecăm dela relaţia găsită

$$2\,cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B+C}{4}=1$$

şi procedăm ca în prima metodă.

Au dat această soluţie d-nii: *Stanciu A. Petre* (Polit.' Timişoara) şi *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara).

Problema 2267. — *Să se determine parametrii λ şi μ şi să se rezolve ecuaţia cu rădăcini întregi.*

$$x^3+\lambda x^2+\mu=0,$$

ştiind că între rădăcinele ei avem relaţia

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=1393.$$

EUGEN WEGENER

Prima soluţie. Observăm că putem scri succesiv

$$(1)\quad x_1^4+x_2^4+x_3^4=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2-2(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2)=$$

$$[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]^2-$$

$$2[(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]=1393.$$

Dacă acum ţinem seamă de relaţiile cunoscute dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei date, anume

$$x_1+x_2+x_3=-\lambda,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0,\quad x_1x_2x_3=-\mu,$$

relaţia (1) devine

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=(\lambda^2)^2+4\lambda\mu=1393=7\times199=(-7)\cdot(-199).$$

Avem astfel de rezolvat în numere întregi ecuaţia

$$\lambda(\lambda^3+4\mu)=7\times199=(-7)\cdot(-199).$$

Putem lua

$\lambda=7$, şi atunci rezultă $343+4\mu=199$, deci $\mu=-36$.

În acest caz, ecuaţia dată devine

$$x^3+7x^2-36=0,$$

ecuaţie care se descompune astfel,

$$(x+2)(x-3)(x-6)=0,$$

şi prin urmare rădăcinile acestei ecuaţii, într'o ordine oarecare, sunt

$$-2,\ 3,\ 6.$$

Dar mai putem lua

$\lambda=-7$ şi atunci rezultă $-343+4\mu=-199$, deci $\mu=36$.

În acest caz, ecuaţia dată devine

$$x^3-7x^2+36=0,$$

ecuaţie care se descompune

$$(x-2)(x+3)(x+6)=0$$

şi prin urmare rădăcinile acestei ecuaţii, într'o ordine oarecare, sunt

$$2,\ -3,\ -6,$$

Soluţii date de d-nii: *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila) şi *Gottard Francisc* (Timişoara).

Soluţia 2-a. Fiindcă rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi prin ipoteză, în relaţia dată

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=1393,$$

cea mai mare rădăcină în valoare absolută, x, de exemplu, n'ar putea fi de cât cel mult ±6, în care caz $x_1^4=1296$.

Atunci rămâne

$$x_2^4+x_3^4=1393-1296=97=16+81,$$

de unde ar rezulta

$$x_2=\pm2,\ x_3=\pm3.$$

Deci într'o ordine oarecare, rădăcinele pot fi

$$\pm2,\ \pm3,\ \pm6$$

Cum

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4=0,$$

nu putem lua pentru x_1, x_2, x_3, într'o ordine oarecare, decât

(1) $\quad -2,\ 3,\ 6$

sau

(2) $\quad 2,\ -3,\ -6.$

În cazul (1), avem

$$-2+3+6=7=-\lambda,\quad(-2)\times3\times6=-36=\mu,$$

deci ecuaţia dată devine

$$x^3+7x^2-36=0,$$

iar în cazul (2), avem

$$2-3-6=-7=-\lambda,\quad 2\times(-3)(-6)=36=\mu,$$

deci ecuaţia dată devine

$$x^3-7x+36=0.$$

Dacă am lua pentru cea mai mare rădăcină întreagă în valoarea absolută, de exemplu valorile ±5, ±4, ±3, n'am găsi pentru celelalte rădăcini x_2, x_3 valori întregi, astfel ca să avem

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=1393.$$

Soluţie dată de d-l *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara).

Problema 2296. — *Să se arate că în orice triunghiu* ABC *avem relaţia*

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C - 2 = \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C + 2 \sec A \sec B \sec C.$$

CAROL SIMCSO

Soluţie. Ştim că într'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$$

(Compléments de Trig, par F. G M, p. 68).

Ridicând la patrat şi scăzând 2 din ambii membrii, obţinem

$$(1) \qquad \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C - 2 = \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C + (\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 1).$$

Dar,

$$(2) \quad \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 1 = \frac{\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B - \cos A \cos B \cos C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\sin A (\sin B \cos C + \sin C \cos B) - \cos A (\cos B \cos C - \sin B \sin C)}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\sin A \sin (B+C) - \cos A \cos (B+C)}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \cos B \cos C} = \sec A \sec B \cos C,$$

fiindcă

$$\sin (B+C) = \sin A, \qquad \cos (B+C) = -\cos A.$$

Ţinând seamă în (1) de relaţia (2), putem scri

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C - 2 = \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C + 2 \sec A \sec B \sec C.$$

Avem astfel stabilită relaţia dată.

Soluţii date de d-nii; *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic Brăila), *Filimon Ioan* Lic. Milit, Timişoara), *Giurconiu Mihail* (Polit, Timişoara), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Kinski Ioan* (Polit, Timişoara), *London Emeric* (Polit, Timişoara), *Miclea Nicolae* (Polit, Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Schauer Alexandru* (Polit., Timişoara), *Serdeleanu Gh.* (Polit, Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic Loga, Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş) şi *Vrânceanu Gh.* Lic. Milit, Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

2345. — Dacă numărul *întreg* n nu conţine factorii 3 şi 5, atunci aceşti factori se găsesc negreşit în numerile *întregi*

$$n^2 - 1 \text{ şi } n^2 + 1.$$

D. POMPEIU

2346. — Se cere patratul de cinci cifre $ab(2c)de$, cifra de la mijloc fiind $2c$, iar rădăcina patrată fiind suma numerelor abc şi cde.

G-L GH. BUICLIU

2347. — Să se arate că într'un triunghiu isoscel ABC (C=B), avem relaţia

$$\frac{b^m \sin^p C - c^m \sin^p B}{b^n \cos^q C - c^n \cos^q B} = \frac{(m-p) b^{m-n}}{n \cos^2 B + q \sin^2 B} \cdot \frac{\sin^p B}{\cos^{q-2} B}.$$

V. ALACI

2348. — Să se construiască un paralelogram cunoscând mijloacele a două laturi, unghiul α al diagonalelor şi aria k^2.

VIRGIL GHITESCU

2349. — În triunghiul ABC, de ortocentru H, se iau pe latura BC două puncte A_1 şi A_2 simetrice faţă de mijlocul M al laturei BC.

Perpendiculara ridicată în A_1 pe BC şi perpendiculara coborâtă din A_2 pe dreapta HA_1, taie latura AC respectiv în punctele B_1 şi B_2.

Să se demonstreze că punctele B_1 şi B_2, sunt simetrice faţă de mijlocul N al laturei AC.

LT. COMANDOR AURELIAN STAN

2350. — Fie AA', BB' doi diametri perpendiculari într'un cerc O. BA' taie în M tangenta dusă în B. A doua tangentă din M la cerc face cu AB un unghiu x, dat de relaţia

$$7 \operatorname{tg} x = 1.$$

N. N. MIHAILEANU

2351. — Dacă,

$$sp(x+y) + sp\, x + sp(x-y) = 1,$$

atunci avem relaţia

$$\cos^2 x - \sin^2 y = \frac{\cos 3x}{2 \sin x},$$

arcele $x+y$, x, x y fiind cuprinse în primul cadran.

CPT C. V. COSTACHESCU

2352. — Să se arate că în triunghiul în care

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2,$$

avem relaţiile

$$(1) \qquad \sin^2 B + \sin^2 C - 3 \sin^2 A = 1;$$

$$(2) \quad \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 4 \cos^2 B \cos^2 C;$$

$$(3) \qquad 3(\sin^2 B + \sin^2 C - 1) = \cos^2 (B - C).$$

I. I. STAMATE

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Arnăutu Marin (2337, 2338, 2339, 2342); *Bărbulescu Vasile* (2342); *Beşchea Radu* (2310, 2316, 2323, 2331, 2325, 2335); *Bogza Mihai* (P; 2304, 2310, 23211, 2312); *Braşoveanu Gh* (2275, 2290, 2312, 2335, 2342); *Constantinescu Ilie* (P); *Costăchescu V. C.* (A; N); *Dobrescu A.* (A); *Filimon Ioan* (P., 2305, 2309, 2311, 2312, 2335); *Rohrlich Alfred* (2311, 2332, 2339, 2342); *Safta Nicolae* (2311, 2333, 2335); *Stanciu Petre* (N., 2304, 2333, 2339); *Tincu C. C-tin* (2296, 2299, 2300, 2302, 2304, 2310, 2312, 2318, 2335); *Vlăduţ C.* (P., 2337, 2328, 2339, 2342).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 100 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din ani II—XXIV, cu preţul de lei 1000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el. şi s'o iscălească.

ANUL XXV. SEPTEMVRIE 1945 No. 7.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ARHIVA STATULUI" SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** CINZECI DE ANI DE ACTIVITATE A „GAZETEI MATEMATICE".
2. **V. ALACI:** O CLASA SPECIALA DE FORME NEDETERMINATE.
3. NOTE MATEMATICE 15, 16.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 658, 1583, 1693, 1697, 2044, 2060.
6. PROBLEME PROPUSE: 2353 - 2360.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 1000 lei fiecare.

ANUL XXV — No. 7. TIMISOARA, SEPTEMVRIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

CINCIZECI ANI DE ACTIVITATE A „GAZETEI MATEMATICE“

DE

V. ALACI

Încă de acum cincizeci de ani, pe firmamentul științific al Țărei noastre, s'a înălțat o stea de prima mărime „Gazeta Matematică“ *din București. Ea a luminat, . . . continuă să strălucească încă și va continua vecinic, iar razele ei binefăcătoare au încolțit sămânța adevărurilor matematice și au dat tot timpul roade frumoase în ogorul științei românești.*

Și acum, când s'a împlinit o jumătate de veac de rodnică și bogată activitate a „G. M.“, noi toți ce am beneficiat de lumina și căldura primită de la ea și am crescut în mintea și inimele noastre dragostea de știință, dorința nestinsă și pasiunea pentru a lucra cu drag și cu folos în vastul domeniu al științei, îndreptăm cu admirație și recunoștință gândul și inima noastră către întemeietorii *ei și înălțăm imn de slavă și de preamărire pentru nobila lor împăptuire, pentru izvorul de energie binefăcător ce cu atâta dărnicie l'au pus la îndemâna tuturor generațiilor prezente și viitoare.*

Și acești noi suntem mulți, — risipiți pe toate meleagurile țării — suntem numeroși ofițeri străluciți, suntem ingineri cu renume, suntem profesori de matematici în învățământul secundar și superior, suntem oameni de știință pură și aplicată, care am creat și am descoperit adevăruri nuoi și definitive în diferite domenii de specialitate, — adevăruri care au trecut hotarele țării — suntem o armată întreagă care se mărește an de an cu noui elemente de elită, suntem în rezumat o mare armată spirituală, mândră, ambițioasă, bine pregătită, gata de a cuceri încă multe culmi ale adevărurilor permanente, gata de a ridica cât mai sus steagul științei românești.

Este adevărat că, în decursul celor 5 decenii, mulți din fruntașii acestei armate au adormit pentru totdeauna, dar spiritul lor, nobilul lor impuls, nețărmurita lor dorință de a ridica cât mai sus nivelul științific al țării, sunt îndreptarii luminoase, sunt îndemnuri stăruitoare ce s'au sălășluit trainic în ființa noastră spirituală, sunt comenzi imperative ce ne poruncesc nouă și tuturor generațiilor de după noi, să atingem cât mai multe din țelurile zărite de ei și să impunem prin activitatea noastră sporită, tuturor celor din alte țări, din țări apropiate, sau din țări mai îndepărtate de peste munți și peste oceane, ca, atunci când vor vorbi despre Țara românească, să vorbească nu numai de vitejia soldaților săi, de bogăția petrolului său, de bogăția munților săi, de strălucirea de aur a spicelor lanurilor sale, de însuși aurul adevărat al minelor sale, dar să vorbească cât mai des, cât mai cu admirație și despre bogăția și strălucirea geniului românesc.

Iată, în puține cuvinte, testamentul spiritual lăsat moștenire nouă celor de azi și celor de mâine, de către întemeietorii „G. M“, . . , acei tineri și distinși ingineri: Ion Ionescu, Victor Balaban †, Vasile Cristescu †, Mihail Roco †, Ion Zottu †, Gh. Ioachimescu †, *care la 15 Septemvrie 1895 au scos primul număr al „G. M“ și au continuat apoi opera lor binecuvântată.*

Întruchipați în bronz sau în marmoră, întemeietorii „G. M“, încununați de aureola lor neperitoare, trebuie să ia parte la ședințele Gazetei și tot acolo trebuie să mai întâlnim chipurile senine și luminoase ale marilor noștrii dascăli, ale marilor nostrii savanți, Gh. Țițeica *și* Traian Lalescu, *creatori de știință universală, care au dat atâta strălucire și putere de viață* „Gazetei Mate-

matice" *şi ştiinţei româneşti.*

Şi, fiindcă pronia cerească a păstrat încă în mijlocul nostru pe unul dintre întemeietorii „G.M.", pe strălucitul profesor şi inginer Ion Ionescu, *care a scris atâtea pagini minunate de ştiinţă tehnică şi istoria ştiinţelor, care a mai scris încă şi multe recenzii despre lucrările apărute (unele poate nedrepte),... către D-sa să concentrăm toate gândurile noastre de simpatie şi admiraţie, către D-sa să îndreptăm buchetul sentimentelor noastre de stimă şi respectuos omagiu, dorindu-i din toate puterile inimilor noastre, sănătate deplină şi încă mulţi ani de fecundă activitate.*

Revista Matematică din Timişoara, *soră mai mică a* Gazetei Matematice, *care şi ea împlineşte în curând un sfert de veac de continuă activitate, care şi a luat impulsul de viaţă din mintea scânteietoare a lui* Traian Lalescu *şi care a fost propulsată de la început de aceleaşi nobile preocupări, vine astăzi printre cei dintâi să ia parte cu bucurie la sărbătorirea semicentenarului* „Gazetei Matematice" *şi să-i exprime sentimentele sale de admiraţie şi solidaritate în aceleaşi năzuinţi comune, dorindu-i o activitate şi mai intensă şi mai rodnică, spre gloria şi înălţarea Ţării.*

O CLASĂ SPECIALĂ DE FORME NEDETERMINATE

DE

V. ALACI

Ne vom ocupa, în cele ce urmează, de o clasă specială de forme nedeterminate în care intervin elementele unui triunghiu isoscel sau echilateral.

Aflând adevărata valoare a acestor expresii, vom găsi unele identităţi remarcabile între elementele unui triunghiu isoscel, sau echilateral.

I. Cazul triunghiului isoscel.

Fie un triunghiu oarecare ABC cu notaţiile obicinuite şi expresia

$$(1) \qquad E = \frac{f(b, C) - f(c, B)}{\varphi(b, C) - \varphi(c, B)},$$

în care f şi φ sunt două funcţii, având derivate parţiale în raport cu variabilele de care depind, variabile care sunt de fapt laturile şi unghiurile triunghiului ABC.

Se observă cu uşurinţă că expresia (1) pentru $c = b$, $C = B$ — ceeace are loc când triunghiul ABC este isoscel — ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Putem deci privi expresia (1) ca o funcţie de două variabile c şi C, care nu sunt independente, căci ele satisfac relaţia

$$(2) \qquad c \sin B - b \sin C = 0,$$

dedusă din teorema sinusurilor.

Deci, pentru $c = b$, $C = B$ soluţii ale ecuaţiei (2), expresia (1) ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Ne propunem dar, a afla adevărata valoare a lui E, *pentru* $c = b$. $C = B$ *soluţii ale ecuaţiei* (2).

Chestiunea astfel pusă, poate fi încadrată în studiul expus de noi în „R. M. T." [1], unde am stabilit că:

Adevărata valoare a unei expresii de forma

$$u = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$, *soluţii ale ecuaţiei*

$$\psi(x, y) = 0,$$

este câtul determinanţilor funcţionali ai funcţiilor $f(x, y)$, $\psi(x, y)$ *şi* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$, *adică*

$$u = \left[\frac{D(f, \psi)}{D(x, y)} : \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right]_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}}.$$

În virtutea acestei reguli, rezultă că *adevărata valoare a expresiei* (1) *pentru* $c = b$, $C = B$ *soluţii ale ecuaţii* (2), *este*

$$u = \left[\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f(c, B)}{\partial c} & \frac{\partial f(b, C)}{\partial C} \\ \sin B & -b \cos C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial \varphi(c, B)}{\partial c} & \frac{\partial \varphi(b, C)}{\partial C} \\ \sin B & -b \cos C \end{vmatrix}} \right]_{\substack{c = b \\ C = B}},$$

sau

---

(1) *V. Alaci:* O clasă de expresii nedeterminate, „R.M.T.". Vol. IV, pp. 4—9 şi 19—24.

$$(A)\quad \left[\left[E=\frac{b\cos C\frac{\partial f(c,B)}{\partial c}-\sin B\frac{\partial f(b,C)}{\partial C}}{b\cos C\frac{\partial \varphi(c,B)}{\partial c}-\sin B\frac{\partial \varphi(b,C)}{\partial C}}\right]_{\substack{c=b\\C=B}}\right].$$

Aplicații.

Problema 1-a *Să se arate că într'un triunghiu isoscel* ABC (C=B), *avem relațiile:*

$$(3)\quad \left[\frac{b^m\sin^p C-c^m\sin^p B}{b^n\sin^q C-c^n\sin^q B}=\frac{m-p}{n-q}\cdot b^{m-n}\sin^{p-q}B\right],$$

$$(4)\quad \left[\frac{b^m\cos^p C-c^m\cos^p B}{b^n\cos^q C-c^n\cos^q B}=\frac{m\cos^2 B+p\sin^2 B}{n\cos^2 B+q\sin^2 B}\times b^{m-n}\cos^{p-q}B\right].$$

Soluția 1-a. Însemnăm cu E și E_1, respectiv, primii membri ai relațiilor (3) și (4).

În cazul triunghiului isoscel, adică pentru $c=b$, C=B, observăm că expresiile E și E_1 iau forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și că aceste valori $c=b$, C=B sunt în același timp soluții ale ecuației

$$c\sin B-b\sin C=0.$$

Conform teoriei expuse, concretizată în formula (A), rezultă *că adevarata valoare a expresiei* E *pentru* $c=b$, C=B, *este*

$$E=\left[\frac{b\cos C.mc^{m-1}\sin^p B-\sin B.pb^m\sin^{p-1}C\cos C}{b\cos C.nc^{n-1}\sin^q B-\sin B.qb^n\sin^{q-1}C\cos C}\right]_{\substack{c=b\\C=B}}.$$

Simplificând prin $b\cos C\sin B$, obținem

$$E_1=\left[\frac{mc^{m-1}\sin^{p-1}B-pb^{m-1}\sin^{p-1}C}{nc^{n-1}\sin^{q-1}B-qb^{n-1}\sin^{q-1}C}\right]_{\substack{c=b\\C=B}}$$

$$=\frac{(m-p)b^{m-1}\sin^{p-1}B}{(n-q)b^{n-1}\sin^{q-1}B}=\frac{m-p}{n-q}\cdot b^{m-n}\sin^{p-q}B.$$

Avem stabilită astfel relația (3).

De asemeni, tot conform formulei (A), putem scri

$$E_1=\left[\frac{b\cos C.mc^{m-1}\cos^p B+\sin B.pb^m\cos^{p-1}C\sin C}{b\cos C.nc^{n-1}\cos^q B+\sin B.qb^n\cos^{q-1}C\sin C}\right]_{\substack{c=b\\C=B}}$$

$$=\left[\frac{mc^{m-1}\cos^p B+pb^{m-1}\sin B\cos^{p-2}C\sin C}{nc^{n-1}\cos^q B+qb^{n-1}\sin B\cos^{q-2}C\sin C}\right]_{\substack{c=b\\C=B}}$$

$$=\frac{mb^{m-1}\cos^p B+pb^{m-1}\sin^2 B\cos^{p-2}B}{nb^{n-1}\cos^q B+qb^{n-1}\sin^2 B\cos^{q-2}B}$$

$$=\frac{m\cos^2 B+p\sin^2 B}{n\cos^2 B+q\sin^2 B}\cdot b^{m-n}\cos^{p-q}B.$$

Prin urmare relația (4) este și ea stabilită.

Soluția 2-a. În virtutea relației (2) $c\sin B=b\sin C$, primul membru al relației (3), devine:

$$E=\frac{b^m\sin^p C-c^{m-p}b^p\sin^p C}{b^n\sin^q C-c^{n-p}b^q\sin^q C}=$$

$$\frac{b^{m-p}-c^{m-p}}{b^{n-q}-c^{n-q}}\cdot b^{p-q}\sin^{p-q}C.$$

Simplificând ultima fracție prin $b-c$, obținem

$$(5)\qquad E=\frac{b^m\sin^p C-c^m\sin^p B}{b^n\sin^q C-c^n\sin^q B}=$$

$$\frac{b^{m-p-1}+b^{m-p-2}c+\cdots+c^{m-p-1}}{b^{n-q-1}+b^{n-q-2}c+\cdots+c^{n-q-2}}\cdot b^{p-q}\sin^{p-q}C.$$

Această relație este valabilă în orice triunghiu ABC.

În cazul problemei noastre, triunghiul ABC fiind isoscel ($c=b$), relația (5) devine

$$\frac{b^m\sin^p C-c^m\sin^p B}{b^n\sin^q C-c^n\sin^q B}=\frac{m-p}{n-q}\cdot b^{m-n}\sin^{p-q}B,$$

tocmai relația cerută (3).

Să trecem acum la stabilirea și a relației (4).

Pentru aceasta, observăm că primul său membru notat cu E_1, în virtutea relației

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}$$

dedusă din (2), devine

$$E_1=\frac{b^m\cos^p C-\dfrac{b^m\sin^m C\cos^p B}{\sin^m B}}{b^n\cos^q C-\dfrac{b^n\sin^n C\cos^q B}{\sin^n B}}=$$

$$\frac{b^m\sin^m B\cos^p C-b^m\sin^m C\cos^p B}{b^n\sin^n B\cos^q C-b^n\sin^n C\cos^q B}\cdot\sin^{n-m}B,$$

sau

$$E_1=\frac{\sin^m B\cos^p C-\sin^m C\cos^p B}{\sin^n B\cos^q C-\sin^n C\cos^q B}\cdot b^{m-n}\sin^{n-m}B.$$

Ținând seamă că triunghiul ABC este isoscel

(C = B), primul factor din E_1, privit ca funcție de variabila C, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și atunci conform regulei lui *L'Hôspital*, adevărata valoare a lui E_1 este

$$E_1 = \left[\frac{-p\sin^m B\cos^{p-1}C\sin C - m\sin^{m-1}C\cos C\cos^p B}{-q\sin^n B\cos^{q-1}C\sin C - n\sin^{n-1}C\cos C\cos^q B}\right]_{C=B} \cdot b^{m-n}\sin^{n-m}B$$

$$= \frac{p\sin^{m+1}B\cos^{p-1}B + m\sin^{m-1}B\cos^{p+1}B}{q\sin^{n+1}B\cos^{q-1}B + n\sin^{n-1}B\cos^{q+1}B} \cdot b^{m-n}\sin^{n-m}B.$$

Scoțând factori comuni pe $\sin^{m-1}B\cos^{p-1}B$ la numător și pe $\sin^{n-1}B\cos^{q-1}B$ la numitor și simplificând, obținem

$$E_1 = \frac{p\sin^2 B + m\cos^2 B}{q\sin^2 B + n\cos^2 B} \cdot b^{m-n}\cos^{p-q}B,$$

tocmai relația (4).

Observare. Formele nedeterminate din E și E_1, vedem că ne-au condus la relațiile remarcabile (3) și (4), valabile în orice triunghiu isoscel ABC, (C=B).

Problema 2 a. *Să se arate că într'un triunghiu isoscel* ABC, (C=B) *avem relația*

$$(6)\quad \boxed{\frac{b^m\operatorname{tg}^p C - c^m\operatorname{tg}^p B}{b^n\operatorname{tg}^q C - c^n\operatorname{tg}^q B} = \frac{p - m\cos^2 B}{q - n\cos^2 B}\, b^{m-n}\operatorname{tg}^{p-q}B}\,.$$

Prima soluție. Notăm cu F primul membru al relației (6).

În cazul triunghiului isoscel ABC, adică pentru $c = b$, C = B, observăm că expresia F ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și că aceste valori $c = b$, C = B sunt în același timp soluții ale ecuației

$$c\sin B - b\sin C = 0.$$

Conform teoriei expuse, *rezultă că adevărata valoare a expresiei* F *din* (6) *pentru* $c = b$, C=B, *în virtutea formulei* (A), *este*

$$F = \left[\frac{b\cos C.m c^{m-1}\operatorname{tg}^p B - \sin B.p b^m\operatorname{tg}^{p-1}C\cdot\frac{1}{\cos^2 C}}{b\cos C.n c^{n-1}\operatorname{tg}^q B - \sin B.q b^n\operatorname{tg}^{q-1}C\cdot\frac{1}{\cos^2 C}}\right]_{\substack{c=b\\C=B}} =$$

$$\left[\frac{m c^{m-1}\cos^3 C\operatorname{tg}^p B - p b^{m-1}\sin B\operatorname{tg}^{p-1}C}{n c^{n-1}\cos^3 C\operatorname{tg}^q B - q b^{n-1}\sin B\operatorname{tg}^{q-1}C}\right]_{\substack{c=b\\C=B}} =$$

$$\frac{(m\cos^3 B\operatorname{tg}B - p\sin B)\, b^{m-1}\operatorname{tg}^{p-1}B}{(n\cos^3 B\operatorname{tg}B - q\sin B)\, b^{n-1}\operatorname{tg}^{q-1}B} =$$

$$\frac{m\cos^2 B - p}{n\cos^2 B - q}\cdot b^{m-n}\operatorname{tg}^{p-q}B,$$

tocmai relația cerută (6).

Soluția 2-a. În virtutea relației

$$c = \frac{b\sin C}{\sin B}$$

dedusă din teorema sinusurilor, primul membru al relației (6), devine

$$F = \frac{b^m\operatorname{tg}^p C - \dfrac{b^m\sin^m C\operatorname{tg}^p B}{\sin^m B}}{b^n\operatorname{tg}^q C - \dfrac{b^n\sin^n C\operatorname{tg}^q B}{\sin^n B}} =$$

$$\frac{b^m\sin^m B\operatorname{tg}^p C - b^m\sin^m C\operatorname{tg}^p B}{b^n\sin^n B\operatorname{tg}^q C - b^n\sin^n C\operatorname{tg}^q B}\sin^{n-m}B,$$

sau

$$F = \frac{\sin^m B\operatorname{tg}^p C - \sin^m C\operatorname{tg}^p B}{\sin^n B\operatorname{tg}^q C - \sin^n C\operatorname{tg}^q B}\cdot b^{m-n}\sin^{n-m}B.$$

Ținând seamă însă că triunghiul ABC este isoscel (C = B), primul factor din F, privit ca funcție de singura variabilă C, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și atunci conform regulei lui *L'Hôspital, adevărata valoare a lui* F *este*

$$F = \left[\frac{p\sin^m B\operatorname{tg}^{p-1}C\cdot\frac{1}{\cos^2 C} - m\sin^{m-1}C\cos C\operatorname{tg}^p B}{q\sin^n B\operatorname{tg}^{q-1}C\cdot\frac{1}{\cos^2 B} - n\sin^{n-1}C\cos C\operatorname{tg}^q B}\right]_{C=B}\cdot b^{m-n}\sin^{n-m}B =$$

$$= \frac{p \sin^m B \operatorname{tg}^{p-1} B - m \sin^{m-1} B \cos^3 B \operatorname{tg}^p B}{q \sin^n B \operatorname{tg}^{q-1} B - n \sin^{n-1} B \cos^3 B \operatorname{tg}^q B} \cdot b^{m-n} \sin^{n-m} B$$

$$= \frac{p \sin B - m \cos^3 B \operatorname{tg} B}{q \sin B - n \cos^3 B \operatorname{tg} B} \cdot b^{m-n} \operatorname{tg}^{p-q} B = \frac{p - m \cos^2 B}{q - n \cos^2 B} \cdot b^{m-n} \operatorname{tg}^{p-q} B,$$

tocmai relația (6).

Caz particular. Dacă triunghiul isoscel ABC este și dreptunghiu ($C = B = 45^0$), relația (6) devine

$$\text{(6')} \qquad \boxed{\frac{b^m \operatorname{tg}^p C - c^m \operatorname{tg}^p B}{b^n \operatorname{tg}^p C - c^n \operatorname{tg}^q B} = \frac{2p - m}{2q - n}}.$$

Problema 3-a. *Să se arate că într'un triunghiu isoscel* ($C = B$), *avem relația*

$$\text{(7)} \qquad \boxed{\frac{b^m \sin^p C \sin^r B - c^m \sin^p B \sin^r C}{b^n \sin^q C \sin^s B - c^n \sin^q B \sin^s C} = \frac{m - p + r}{n - q + s} \cdot b^{m-n} \sin^{p+r-q-s} B}.$$

Prima soluție. Însemnăm cu F_1 primul membru al relației (7) și observăm că el se mai poate scri

$$\text{(8)} \quad F_1 = \frac{b^m \sin^{p-r} C \sin^{r-p} B - c^m}{b^n \sin^{q-s} C \sin^{s-p} B - c^n} \cdot \sin^{p-q} B \sin^{r-s} C.$$

Primul factor poate fi privit ca o funcție de două variabile c, C și care pentru $c = b$, $C = B$ (triunghiul ABC fiind isoscel) ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și aceste valori $c = b$, $C = B$ sunt și rădăcini ale ecuației

$$c \sin B - b \sin C = 0.$$

Conform teoriei expuse, *adevărata valoare a lui* F *pentru* $c=b$, $C=B$, *în virtutea formulei* (A), *este*

$$F_1 = \left[\frac{b \cos C \,.\, m c^{m-1} - \sin B (p - r) b^m \sin^{p-r-1} C \cos C \sin^{r-p} B}{b \cos C \,.\, n c^{n-1} - \sin B (q - s) b^n \sin^{q-s-1} C \cos C \sin^{s-q} B}\right]_{\substack{c=b \\ C=B}} \cdot \sin^{p+r-q-s} B$$

$$= \left[\frac{m c^{m-1} - (p - r) b^{m-1} \sin^{p-r-1} C \sin^{r-p+1} B}{n c^{n-1} - (q - s) b^{n-1} \sin^{q-s-1} C \sin^{s-q+1} B}\right]_{\substack{c=b \\ C=B}} \cdot \sin^{p+r-q-s} B = \frac{m - p + r}{n + q + s} \cdot b^{m-n} \sin^{p+r-q-s} B,$$

tocmai relația cerută (7).

Soluția 2-a. Dacă în relația (8), care este de fapt primul membru al relației (7), înlocuim pe c cu valoarea,

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

dedusă din teorema sinusurilor, putem scri succesiv

$$F_1 = \frac{b^m \sin^{p-r} C \sin^{r-p} B - \dfrac{b^m \sin^m C}{\sin^m B}}{b^n \sin^{q-s} C \sin^{r-q} B - \dfrac{b^n \sin^n C}{\sin^n B}} \cdot \sin^{p-q} B \sin^{r-s} C$$

$$= \frac{\sin^{p-r} C \sin^{m+r-p} B - \sin^m C}{\sin^{q-s} C \sin^{n+s-q} B - \sin^n C} \cdot b^{m-n} \sin^{n+p-m-q} B \sin^{r-s} C,$$

sau

$$\text{(9)} \qquad F_1 = \frac{\sin^{p-r-m} C \sin^{m+r-p} B - 1}{\sin^{q-s-n} C \sin^{n+s-q} B - 1} \cdot b^{m-n} \sin^{n+p-m-q} B \sin^{m+r-n-s} C.$$

Ținând seamă însă că triunghiul ABC este isoscel ($C = B$), primul factor din F_1, privit ca o funcție de variabila C, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și atunci conform regulei lui *L'Hôspital, adevărata valoare a lui* F_1 *din* (9) *pentru* $C = B$, *este*

$$F_1 = \left[\frac{(p - r - m) \sin^{p-r-m-1} C \cos C \sin^{m+r-p} B}{(q - s - n) \sin^{q-s-n-1} C \cos C \sin^{n+s-q} B}\right]_{C=B} \cdot b^{m-n} \sin^{p+r-q-s} B = \frac{m - p + r}{n - q + s} \cdot b^{m-n} \sin^{p+r-q-s} B,$$

tocmai relația cerută (7).

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

15. — *Quelques égalités multiples vraies aux degrés 2, 4, 6.*

De trois égalités multigrades vraies aux degrés 1, 3, 5, données par M. *Mahrenholz* (Sphinx, février 1939, page 31) j'ai déduit les suivantes:

(α) $x^2-13xy-6y^2$, $5x^2+9xy+10y^2$,
$7x^2-5xy-8y^2$, $9x^2+7xy-4y^2 \overset{p}{=}$
$x^2+15xy+8y^2$, $5x^2-7xy-10y^2$,
$7x^2+5xy-6y^2$, $9x^2+5xy+4y^2$
$(p=2,4,6)$.

Exemple: $x=2$, $y=1$
$5, 14, 23, 24 \overset{p}{=} 2, 16, 21, 25,$

(β) $2x^2-11xy-9y^2$, $4x^2+19xy+7y^2$,
$6x^2+xy+5y^2$, $8x^2+15xy+y^2 \overset{p}{=}$
$2x^2+17xy+5y^2$, $4x^2-9xy-7y^2$
$6x^2+13xy-y^2$, $8x^2+13xy+9y^2$
$(p=2,4,6)$.

Exemple: $x=2$, $y=1$
$23, 31, 61, 63 \overset{p}{=} 9, 47, 49, 67,$

(γ) $19xy+8y^2$, $2x^2-7xy-4y^2$, $4x^2+15xy+2y^2$,
$6x^2-11xy-10y^2$, $6x^2+15xy+12y^2$, $8x^2+xy-6y^2 \overset{p}{=}$
$9xy+6y^2$, $2x^2+21xy+10y^2$, $4x^2-13xy-12y^2$,
$6x^2-xy-8y^2$, $6x^2+17xy+4y^2$, $8x^2-xy+2y^2$,
$(p=2,4,6)$.

Exemple: $x=2$, $y=1$
$4, 5, 14, 23, 24, 33 \overset{p}{=} 7, 11, 12, 16, 30\,31.$

(δ) $xy+2y^2$, $2x^2-9xy-2y^2$, $2x^2-xy+2y^2$,
$2x^2+xy+6y^2$, $4x^2-7xy-6y^2$, $4x^2-xy-6y^2 \overset{p}{=}$
$7xy+2y^2$, $2x^2-5xy-6y^2$, $2x^2-5xy-6y^2$
$2x^2+xy-6y^2$, $4x^2-5xy-2y^2$, $4x^2-3xy+2y^2$,
$(p=2,4,6)$.

Exemple: $x=3$, $y=1$
$5, 9, 11, 17, 27, 27 \overset{p}{=} 3, 3, 15, 19, 23, 29.$

(ε) $14xy-3y^2$, $2x^2-4xy+5y^2$, $2x^2+4xy+9y^2$,
$4x^2+6xy+7y^2$, $6x^2-14xy-y^2$, $8x^2+4xy-5y^2$,
$10x^2-6xy-3y^2 \overset{p}{=} 4xy-3y^2$, $2x^2-14xy-5y^2$,
$2x^2+14xy-y^2$, $4x^2-6xy-9y^2$, $6x^2+4xy-7y^2$,
$8x^2-6xy+5y^2$, $10x^2-4xy+3y^2$, $(p=2,4,6)$.

Exemple: $x=3$, $y=1$

$11, 11, 39, 39, 61, 69, 79 \overset{p}{=} 9, 9, 29, 59, 59, 79, 81,$

A. GLODEN

16. — *Asupra unei limite.*

În cele ce urmează îmi propun să soluționez următoarea problemă:

Să se găsească pentru $m=\infty$ limita expresiei:

$$y=\left(\frac{a_1^{\frac{1}{m}}+a_2^{\frac{1}{m}}+\cdots+a_p^{\frac{1}{m}}}{p}\right)^m.$$

Expresia se prezintă sub forma nedeterminată 1^∞. Ea se poate scrie:

$$y=\left(1+\frac{a_1^{\frac{1}{m}}+a_2^{\frac{1}{m}}+\cdots+a_p^{\frac{1}{m}}-p}{p}\right)^m.$$

Vom nota pentru prescurtare

$$\lambda=\frac{a_1^{\frac{1}{m}}+a_2^{\frac{1}{m}}+\cdots+a_p^{\frac{1}{m}}-p}{p}.$$

Pentru a găsi limita lui y vom scrie:

$$y=(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}\cdot m\lambda}=\left[(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^{m\lambda}.$$

Observăm că pentru $m=\infty$, λ tinde la zero deci $1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$ tinde către e. Rămâne să găsim pentru $m=\infty$ limita expresiei:

$$m\lambda=\frac{m}{p}\left(a_1^{\frac{1}{m}}+a_2^{\frac{1}{m}}+\cdots+a_p^{\frac{1}{m}}-p\right).$$

Pentru aceasta desvoltăm în serie pe $a_1^{\frac{1}{m}}, a_2^{\frac{1}{m}}\ldots a_p^{\frac{1}{m}}$ și avem:

$$(1)\qquad a_1^{\frac{1}{m}}=1+\frac{La_1}{m}+\frac{\alpha_1}{m^2}$$

$$(2)\qquad a_2^{\frac{1}{m}}=1+\frac{La_2}{m}+\frac{\alpha_2}{m^2}$$

$$\vdots$$

$$(p)\qquad a_p^{\frac{1}{m}}=1+\frac{La_p}{m}+\frac{\alpha_p}{m^2}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ sunt funcţii de m care însă rămân finite când m tinde către infinit.

Adunând membru cu membru relaţiile de mai sus avem:

$$a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \cdots + a_p^{\frac{1}{m}} =$$

$$p + \frac{\mathrm{L}a_1 + \mathrm{L}a_2 + \cdots + \mathrm{L}a_p}{m} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p}{m^2} =$$

$$p + \frac{\mathrm{L}(a_1 a_2 \ldots a_p)}{m} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p}{m}.$$

Rezultă de aci că:

$$m\lambda = \frac{m}{p}\left[\frac{\mathrm{L}(a_1 a_2 \ldots a_p)}{m} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p}{m^2}\right] =$$

$$\frac{\mathrm{L}(a_1 a_2 \ldots a_p)}{p} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p}{pm}.$$

Făcând pe m să tindă către infinit avem:

$$\lim_{m=\infty} m\lambda = \frac{1}{p}\mathrm{L}(a_1 a_2 \ldots a_p) = \sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p}.$$

Prin urmare

$$\lim y = e^{\mathrm{L}\sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p}} = \sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p}.$$

CEZAR IVANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, No. 12, August 1945. Al 3-lea Congres al matematicienilor Români. Asupra paralelogramelor înscrise într'un paralelogram dat, de *A. Dobrescu*. Discuţia şi separarea rădăcinelor ecuaţiilor pseudo-omogene, de *I. V. Mătieş*. Raportul pentru decernarea premiului „*Spiru-Haret*", de *Al. Bunescu*, *Al. Stoenescu* şi *Gabriela Ţiţeica*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Mathematica*, Volumul XXI, 1945. Über harmonische Funktionen, von *J. Ridder*. Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles, par *Paul Montel*. Sur la courbure affine de la développée affine d'une courbe plane, par *N. Abramescu*. Sur la nature fonctionnelle des fonctions quasi-analytiques générales, par *Al. Ghica*. Table des solutions de la congruence $x^4+1\equiv 0 \pmod{p.}$ pour $2.10^5 < p < 3.10^5$, par *A. Gloden*. Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de „coordonnées". Contribution à l'histoire de la Géométrie Analytique, par *Gino Loria*. Sur les sommes et les intersections d'ensembles des espaces topologiques, par *Julien Pétresco*. Sur le calcul symbolique de *Cayley-Aronhold-Clebsch* dans la théorie des invariants, par *Georges Calugareanu*.

3. *V. Vâlcovici*. Asupra unei probleme de Algebră Vectorială. (Extras din „Revista Matematică din Timişoara, anul XXV, No. 4).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 658. — *Să se arate că avem*

$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & \ldots & (n-2)! & (n-1)! \\ 1! & 2! & 3! & \ldots & (n-1)! & n! \\ 2! & 3! & 4! & \ldots & n! & (n+1)! \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-2)! & (n-1)! & n! & \ldots & (2n-4)! & (2n-3)! \\ (n-1)! & n! & (n+1)! & \ldots & (2n-3)! & (2n-2)! \end{vmatrix} \equiv [1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!]^2.$$

C. IONESCU-BUJOR

Soluţie. Însemnând Δ_n, determinantul propus, avem

$$\Delta_n = 1!.2!.3!\ldots(n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & (n-1) & n \\ 1.2 & 2.3 & 3.4 & \ldots & (n-1)n & n(n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1.2\ldots(n-2) & 2.3\ldots(n-1) & 3.4\ldots n & \ldots & (n-1)\ldots(2n-4) & n\ldots(2n-3) \\ 1.2\ldots(n-1) & 2.3\ldots n & 3.4\ldots(n-1) & \ldots & (n-1)\ldots(2n-3) & n\ldots(2n-2) \end{vmatrix}.$$

Scăzând coloanele $1, 2, \ldots, n-1$ respectiv din $2, 3, \ldots, n$, obţinem

$$\Delta_n = 1!2!\ldots(n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1.2 & 2.2 & 3\,2 & \ldots & (n-1)\,2 & n\,2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1.2\ldots(n-2) & 2.3\ldots(n-2)(n-2) & 3.4\ldots(n-1)(n-2) & \ldots & (n-1)\ldots(2n-5)(n-2) & n\ldots(2n-4(n-2) \\ 1.2\ldots(n-1) & 2.3\ldots(n-1)(n-1) & 3.4\ldots n(n-1) & \ldots & (n-1)\ldots(2n-4)(n-1) & n\ldots(2n-4(n-1) \end{vmatrix},$$

Dacă dezvoltăm determinantul membrului II după elementele liniei I, iar apoi scoatem factor comun din fiecare linie, obţinem succesiv

$$\Delta_n = 1!.2!.3!\ldots(n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2.2 & 3.2 & \ldots & (n-1).2 & n.2 \\ 2.3.3 & 3.4.3 & \ldots & (n-1)\,n\,3 & n(n+1).3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\ldots(n-2)(n-2) & 3\ldots(n-1)(n-2) & \ldots & (n-1)\ldots(2n-5)(n-2) & n\ldots(2n-4).3 \\ 2,..(n-1)(n-1) & 3\ldots n(n-1) & \ldots & (n-1)\ldots(2n-4)(n-1) & n\ldots(2n-3).3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = [1!.2!.3!\ldots[(n-1)!]^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & (n-1) & n \\ 2.3 & 3.4 & 4.5 & \ldots & (n-1)\,n & n(n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\ldots(n-2) & 3\ldots(n-1) & 4\ldots n & \ldots & (n-1)\ldots(2n-5) & n\ldots(2n-4) \\ 2\ldots(n-1) & 3\ldots(n) & 4\ldots(n+1) & \ldots & (n-1)\ldots(2n-4) & n\ldots(2n-3) \end{vmatrix}.$$

Mai departe vom urma în acelaşi chip, adică scădem elementele coloanelor $1, 2\ldots(n-2)$; respectiv din elementele coloanelor $2, 3, \ldots, (n-1)$; desvoltăm determinantul obţinut după elementele liniei I, apoi scoatem factorii comuni, cari vor alcătui pe $(n-2)!$ etc. Vom găsi în cele din urmă

$$\Delta_n = 1!.2!.(3!)^2\ldots[(n-1)!]^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (n-2) & (n-1) & n \\ (n-2)(n-1) & (n-1)\,n & n(n+1) \end{vmatrix},$$

sau

$$\Delta_n = 1!.2!.(3!)^2\ldots[(n-1)!]^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (n-2) & 1 & 1 \\ (n-2)(n-1) & (n-1).2 & (n-1).1 \end{vmatrix}, \quad \text{sau } \Delta_n = [1!.2!.3!\ldots(n-1)!]^2.$$

Soluţie dată de *Gheorghiu Alexandru* (Lic. Piatra-Neamţ) şi *Novacu Valeriu* (Lic. Arad).

Problema 1583. — *Se dă triunghiul* ABC *dreptunghic în* A *şi se duc segmentele de dreaptă* AC_1, BA_1, CB_1 *în exteriorul triunghiului şi astfel ca să avem*

$$\sphericalangle BAC_1 = \sphericalangle CBA_1 = \sphericalangle ACB_1.$$

Ştiind că avem încă

$$\frac{AB}{AC_1} = \frac{BC}{BA_1} = \frac{CA}{CB_1},$$

să se demonstreze că aria triunghiului A_1BC *este egală cu suma ariilor triunghiurilor* B_1CA *şi* C_1AB.

V. ALACI

Soluţie. Fie ABC triunghiul dreptunghic dat. Construim triunghiurile A_1BC, B_1CA şi C_1AB, ale căror arii le însemnăm respectiv cu s, s_1, s_2, astfel ca

(1) $$\sphericalangle BAC_1 = \sphericalangle CBA_1 = \sphericalangle ACB_1$$

şi

$$(2)\qquad \frac{AB}{AC_1}=\frac{BC}{BA_1}=\frac{CA}{CB_1}.$$

Triunghiurile A_1BC, B_1CA, C_1AB având câte un unghiu egal cuprins între laturi proporţionale, ceeace rezultă din relaţiile (1) şi (2), urmează conform unei teoreme cunoscute, că raportul ariilor a două din aceste triunghiuri este egal cu raportul patratelor a două laturi omoloage, deci

$$\frac{s_1}{s}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2},\quad \frac{s_2}{s}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}.$$

Adunând aceste relaţii şi ţinând seamă că

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}=\overline{BC}^2,$$

fiindcă triunghiul ABC este dreptunghic, avem

$$\frac{s_1+s_2}{s}=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BC}^2}=1.$$

De aci rezultă

$$s=s_1+s_2,$$

tocmai ceeace trebuia dovedit.

Observare. Triunghiurile A_1BC, B_1CA, C_1AB, evident că pot fi şi în interiorul lui ABC, sau unele în exterior şi altele în interiorul lui ABC

Soluţii date de d-nii: *Aman C-tin* (Polit., Timişoara), *Andrunachievici Vladimir* (Iaşi), *Aniţescu Nicolae*, *Apostol Radu* (Lic. Milit. Nicolae Filipescu), *Babeţiu Cornel* (Polit., Timişoara), *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Berinde Titus* (Polit., Timişoara), *Cetăţeanu Stelian* (Bucureşti), *Cristea Nicolae* (Lic. Blaj), *Dăscălescu Hristche*, *Diaconescu Ion* (Lic Tn.-Severin), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit, Timişoara), *Jidanu C-tin* (Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Lt), *Matei D-tru* (Lic. Internat, Iaşi), *Modâlcă Emil* (Lic. Tn.-Severin), *Murgu Marţian* (Polit., Timişoara), *Negrea Mircea* (Brăila), *Popescu Adrian* (Lt.), *Ripianu Andrei*, *Segal Zigu* (Vaslui), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Stamate Ionel* (Cluj), *Ştefănescu Nicolae* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu Mirel* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Tilica Ştefan* (Lic. T-Severin), *Vijelie Eugen* (Lic. Milit. N. Filipescu) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1693. — *Având* $x+y=180^0$, *se cere să se afle adevărata valoare a expresiei*

$$E=\frac{\cos x+\cos y}{2\cos^2\frac{x+y}{2}}+\frac{\sin x(\cos x-\cos y)}{\sin x-\sin y},$$

pentru $x=a$.

V. ALACI

Soluţie. Arcele x şi y fiind suplimentare, avem

$$\cos x=-\cos y,\quad \sin x=-\sin y$$

astfel că expresia dată pentru $x=a$, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}\pm\infty$.

Pentru a afla adevărata valoare a lui E, desvoltăm pe $\cos x\pm\cos y$, $\sin x-\sin y$ şi simplificând obţinem

$$(1)\quad E=\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos^2\frac{x+y}{2}}-\frac{2\sin x\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{x-y}{2}-\sin x\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}.$$

Cum

$$\cos\frac{x-y}{2}=\cos\left(x-\frac{x+y}{2}\right)=$$

$$\cos x\cos\frac{x+y}{2}+\sin x\sin\frac{x+y}{2},$$

expresia (1) devine

$$E=\frac{\cos x\cos\frac{x+y}{2}+\sin x\sin\frac{x+y}{2}-\sin x\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}=\cos x$$

şi prin urmare pentru $x=a$ avem

$$E=\cos a.$$

Soluţii date de d-ra *Papadopol Elena* (Bacău) şi de d-nii *Aldea Minea* (Buzău), *Aniţescu Nicolae*, *Bakonyi C.* (Lic. Loga, Timişoara), *Buznea Dinu* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Cetăţeanu Stelian* (Lic. Şincai, Bucureşti), *Ciceiu Cetate* (Colegiul „Carol", Craiova), *Cristea Nicolae* (Lic. Blaj), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Diaconescu Ion* (Lic. Tn.-Severin), *Doscan Alexandru* (Lic. Giurgiu), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Georgescu Benone* (Colegiul „Carol", Craiova), *Godea Ioan*, *Jidanu C-tin* (Lic. Beiuş), *Lupescu Corneliu* (S.-Lt), *Mihăileanu Andrei* (Lic. Arad), *Mironescu D-tru* (Lic. Milit, Tg.-Mureş), *Mocanu C-tin* (Lic. Milit, Cernăuţi), *Modâlcă Emil* (Tn.-Severin), *Popescu Adrian* (Polit., Timişoara), *Şandor Vasile*, *Schapira Salo* (Lic. Piatra-Neamţ), *Segal Zigu* (Vaslui), *Staicu I.* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Stamate Ionel* (student. Cluj), *Ştefănescu Marin* (S.-Lt.), *Teodorescu Dorin* (Şcoala Normală), *Tilică Ştefan*, *Topolescu Gh.* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Văduva Marin* (Lic. Giurgiu) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1697. — *Să se arate că expresia*

$$7^{4n}+101^{2n}+166$$

este divizibilă prin 12, *oricare ar fi n întreg, pozitiv.*

SUB-LT. MARIN P. TICA

Soluție. Expresia din enunț se poate scri încă

(1) $$2401^n + 10201^n + 166.$$

Dar

$$2401 = \text{mult}\,12 + 1, \quad 10201 = \text{mult}\,12 + 1,$$
$$166 = \text{mult.}\ 2-2$$

și atunci expresia (1) devine

$$2401^n + 10201^n + 166 = (\text{mult}\,12+1)^n + (\text{mult}\,12+1)^n +$$
$$\text{mult}\,12-2 = \text{mult}\,12+1+\text{mult}\,12+1+\text{mult}\,12-2 = \text{mult}\,12$$

Astfel, expresia dată este divizibilă prin 12.

Soluții date de d-ra *Checian Ana* (Lic. Carmen Silva, Timișoara) și de d-nii: *Aldea Minea* (Buzău), *Anastasiu Mihail* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Anițescu Nicolae*, *Bakonyi C.* (Lic. Loga, Timișoara), *Bârlea Suhățeanu* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Boeru Alexandru* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Brădeanu Nicolae* (Lic. Beiuș), *Buznea Dinu* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Cetățean Stelian* (Lic. Șincai, București), *Chiriac C-tin*, *Cristea C-tin* (Lic. Milit., Chișinău), *Cristea Nicolae* (Lic. Blaj), *Damianof Ștefan* (Lic. Român, Sofia), *Dăscălescu Hristache* (Focșani), *Deheleanu Gheorghe* (Lic. Beiuș), *Doscan Alexandru* (Lic. Giurgiu), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit, Timișoara), *Giurgica Sterie* (Lic. Român, Sofia), *Gligor Ioan* (Lic. Arad), *Herman Carol* (Blaj), *Ionescu Petre* (Craiova), *Jidanu C-tin* (Lic. Beiuș), *Lepolozki Carol* (Cluj), *Luca Ioan* (Lic. Arad), *Lupescu Cornelius* (S.-Lt, Roman), *Matei Augustin* (Cluj), *Mocanu C-tin* (Lic. Milit., Cernăuți), *Modâlcă Emil* (Lic. T.-Severin), *Moldovan Cornel* (Polit., Timișoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Nicola Gheorghe* (Lic. Român, Sofia), *Peltech M.* (Lic. Român, Sofia), *Popescu Adrian* (Polit., Timișoara), *Siban C-tin* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Segal Zigu* (Lic. Vaslui), *Staicu I.* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu Mirel* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică Ștefan*, *Topolescu Gh.* (Lic. Milit., Tg.-Mureș), *Stamate Ionel* (Lugoj), *Vasiliu D-tru* (Lic. Milit., Timișoara), *Văduva Marin* (Lic. Giurgiu), *Venter D-tru* (Lic. Beiuș), *Vijelie Eugen* (Lic. Milit., N. Filipescu) și *Vegener Eugen* (București)

Problema 2044. — *Să se rezolve sistemul*

$$(x+a)(y+a)(z+a) = (x+b)(y+b)(z+b) =$$
$$(x+c)(y+c)(z+c) = k.$$

Discuție. Generalizare.

EUGEN WEGENER

Soluție. Efectuând înmulțirile și notând

$$X = \Sigma x, \quad Y = \Sigma xy, \quad Z = xyz,$$

putem scri:

$$(1) \quad \begin{cases} a^2X + aY + Z = k - a^3 \\ b^2X + bY + Z = k - b^3 \\ c^2X + cY + Z = k - c^3. \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem după regula lui *Cramer*, avem

$$(2) \qquad X = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad Z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k-a^3 & a & 1 \\ k-b^3 & b & 1 \\ k-c^3 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-a^3 & a & 1 \\ a^3-b^3 & b-a & 0 \\ a^3-c^3 & c-a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a^3-b^3 & b-a \\ a^3-c^3 & c-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2 & k-a^3 & 1 \\ b^2 & k-b^3 & 1 \\ c^2 & k-c^3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & k-a^3 & 1 \\ b^2-a^2 & a^3-b^3 & 0 \\ c^2-a^2 & a^3-c^3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a^2 & a & k-a^3 \\ b^2 & b & k-b^3 \\ c^2 & c & k-c^3 \end{vmatrix} = k\Delta - abc\Delta = (k-abc)\Delta.$$

În virtutea acestor relații, expresiile (2) devin

$$X = -(a+b+c), \quad Y = ab+bc+ca, \quad Z = k-abc,$$

Rezultă de aci că x, y, z sunt rădăcinele ecuației

$$t^3 + (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc + k = 0,$$

ecuație, în care după ce facem să dispară termenul în t^2, se reduce la forma

$$u^3 + pu + q = 0,$$

care se rezolvă apoi cu ajutorul formulelor lui *Cardan* și ne dă pe x, y, z.

Discuție. 1°. Sistemul (1) este compatibil când $a \neq b \neq c$.

2°. Dacă două dintre numerile a, b, c sunt egale, de exemplu $b = c$, atunci sistemul (1) se reduce la primele două ecuații, cu trei necunoscute, una dintre necunoscute putând fi luată oarecare, de exemplu $Z = k_1$ și rămâne

$$\begin{cases} a^2X + aY = a_1, & (a_1 = k - a^3 - k_1) \\ b^2X + bY = b_1, & (b_1 = k - b^3 - k_1). \end{cases}$$

Sistemul (1) admite în acest caz soluțiile

$$X = \frac{a_1 b - a b_1}{a^2 b - a b^2} = A_1, \quad Y = \frac{a^2 b_1 - a_1 b_2}{a^2 b - a b^2} = B_1,$$

$$Z = k_1,$$

astfel că x, y, z sunt rădăcinele ecuației

$$t^3 - A_1 t^2 + B_1 t - k_1 = 0.$$

3°. Dacă $a = b = c$, atunci sistemul (1) se reduce la ecuația

$$a^2 X + a Y + Z = k^3 - a^3,$$

unde Y și Z pot fi luate arbitrare și avem

$$X = \frac{k^3 - a^3 - a k_2 - k_3}{a^2} = A, \quad Y = k_2, \quad Z = k_3,$$

iar x, y, z sunt rădăcinele ecuației

$$t^3 - A t^2 + k_2 t - k_3 = 0.$$

4°. În fine dacă, $k = 0$, sistemul dat admite soluțiile

$$x = -a, \quad y = -b, \quad z = -c$$

și pe acelea se obțin prin permutări circulare din acestea.

Generalizare. Mai general, putem avea sistemul

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k + a_1) = \prod_{k=1}^{n}(x_k + a_2) = \cdots = \prod_{k=1}^{k}(x_k + a_n) = k.$$

Acest sistem, dezvoltat, se poate scri

$$(3) \quad \begin{cases} a_1^{n-1} X_1 + a_1^{n-2} X_2 + \cdots + X_n = k - a_1^n \\ a_2^{n-1} X_1 + a_2^{n-2} X_2 + \cdots + X_n = k - a_2^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{n-1} X_1 + a^{n-2} X_2 + \cdots + X_n = k - a_n^n, \end{cases}$$

unde

$$X_1 = \Sigma x, \; X_2 = x_i x_k, \ldots, X_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Sistemul se poate rezolva cu ajutorul regulei lui *Cramer*

$$X_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

unde Δ este un determinant *Wandermonde*, iar Δ_k se știe forma.

Odată calculate cantitățile X_k, ecuația

$$t^n - X_1 t^{n-1} + X_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} X_n = 0$$

ne dă necunoscutele x, y, z.

Soluție dată de *Păläceanu Vasile* (Lic. Milit., Timișoara)

Problema 2060. — *Se dă baza a și înălțimea h a unui triunghiu dreptunghiu. Să se calculeze latura patratului înscris în acest triunghiu și având latura aplicată pe baza triunghiului.*

În acest caz, să se arate că relația

$$R - \sqrt{2}.r = R\frac{a-h}{a+h}$$

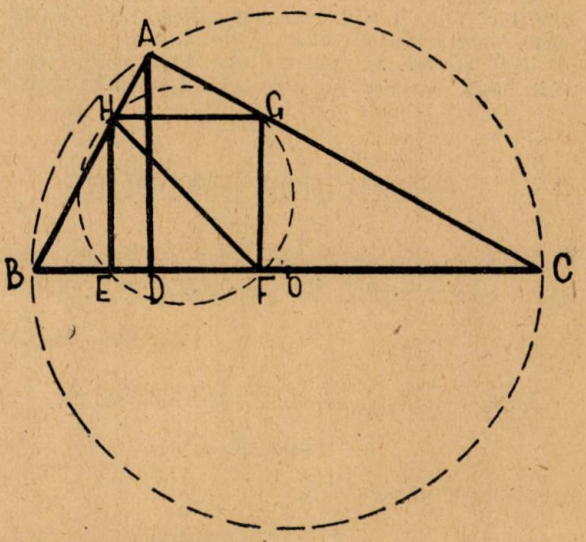
este adevărată, R și r fiind respectiv raza cercului circumscris triunghiului dreptunghiu și raza cercului circumscris patratului.

EUGEN I. SIPOS

Soluție. Construim triunghiul dreptunghic ABC și patratul EFGH cu latura $EF = l$ situată pe ipotenuza BC. Fie $AD = h$ înălțimea din A, O mijlocul lui BC, deci centru cercului circumscris triunghiului ABC.

Din triunghiurile asemenea AHG și ABC, avem

$$\frac{HG}{BC} = \frac{AM}{AD}, \text{ sau } \frac{l}{a} = \frac{h-l}{h} = \frac{h}{a+h}.$$



De aci deducem

$$(1) \qquad l = \frac{a h}{a+h}.$$

Avem astfel calculată latura patratului înscris în triunghiul ABC, în funcție de elementele date.

Mai departe observăm că,

$$HF = 2r = \sqrt{2}\, l, \text{ deci } r = \frac{l}{\sqrt{2}},$$

apoi $R = BO = \frac{a}{2}$, astfel că

$$R - \sqrt{2}.r = \frac{a}{2} - \sqrt{2}\,\frac{l}{\sqrt{2}}$$

și având în vedere relația (1), rezultă

$$R-\sqrt{2}.r=\frac{a}{2}-\frac{ah}{a+h}=\frac{a(a-h)}{2(a+h)}$$

şi fiindcă $\frac{a}{2}=R$, avem

$$R-\sqrt{2}r=R\frac{a-h}{a+h},$$

adică tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-ra *Dorgesiu Iuliana* (Constanţa) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Creţa Gavril* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cristea Viorel*, *Deme Gh.* (Lic. Beiuş), *Dobrotescu Gh.* (Lic. Caracal), *Enache Ion* (Lt.) *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh.* (Lic. Tg.-Jiu), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişora), *Grigore Ioan* (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Halil Midhat* (Bucureşti), *Ieşan Alexandru* (Bucureşti), *Iung* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Knopf Hermann* (Timişoara), *Mesch Iosef* (Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Olteanu Ioan* (Polit., Timişoara), *Pat Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Sasu Ion* (Lic. Beiuş), *Soare Mircea* (Bucureşti), *Ştefănescu M* (Lt), *Stretea Alexandru* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Polit., Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2353. — Să se demonstreze că 93636 este singurul patrat perfect de forma 93636...3636.

G-L GH. BUICLIU

2354. — Însemnând, ca de obiceiu, cu

$$z=x+iy$$

variabila complexă, fie

$$\varphi(z)=z^2+az+b$$

un polinom de gradul doi, cu coeficienţi *reali* şi *pozitivi*.

În aceste condiţii să se arate că

$$|\varphi(iy)|<|\varphi(iy+x)|$$

dacă x este *pozitiv*.

D. POMPEIU

2355. — Dacă

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ şi } a^2=b^2+c^2,$$

atunci

$$a^2(b^4+c^2y^2)=b^2(a^4-c^2x^2).$$

N N. MIHAILEANU

2356. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}(1-x^2)(1-yz)=a(1+xy)(1+xz)\\(1-y^2)(1-zx)=b(1+yz)(1+yx)\\(1-z^2)(1-xy)=c(1+zx)(1+zy).\end{cases}$$

ION ENACHESCU

2357. — Între rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei

$$x^3+3x^2-3x+7=0,$$

avem relaţia

$$\frac{1+\sum_{i=1}^{3}\operatorname{arc\,tg}x_i}{1-\sum_{i=1}^{3}\operatorname{arc\,tg}x_i}=\frac{4+\pi}{4-\pi}.$$

ILIE CONSTANTINESCU

2358. — Prin punctele O şi A ale unui cerc se duc dreptele OM şi AN (N pe cerc), astfel ca

$$\sphericalangle MOA=\sphericalangle NAO.$$

Să se afle locul geometric Q al piciorului lui perpendicularei dusă din N pe dreapta OM, când acesta se roteşte în jurul punctului O. Să se construiască curba (Q).

GAVRIL F. CRETA

2359. — Într'un triunghiu oarecare ABC, în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţiile

$$b\cos C-2c\cos^2\frac{B}{2}=\frac{b^2-4c^2\cos^2\frac{B}{2}}{a+c},$$

$$(b+2c\cos C)\cos\frac{B}{2}=(a+c)\cos\left(\frac{B}{2}-C\right).$$

V ALACI

2360. — Să se rezolve ecuaţia

$$40\,sp^2x+\operatorname{cotg}^2x+Cp^2x=40\,cp^2x+\operatorname{tg}^2x+Sp^2x.$$

LT C-DOR C. V. COSTACHESCU

Erată. La problema 2350, în rândul al 2-lea trebuie B'A în loc BA'; în rândul al 3-lea trebuie AB' în loc de AB·

INFORMAȚIUNI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în considerație, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Rugăm pe corespondenții noștrii ca problemele propuse să fie însoțite de soluțiile corespunzătoare.

Legându-se colecțiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 100 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din ani II—XXIV, cu prețul de lei 1000 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

ANUL XXV. OCTOMVRIE 1945 No. 8.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI: O CLASA SPECIALA DE FORME NEDETERMINATE. (URMARE)
2. NOTE MATEMATICE 17, 18, 19.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1299, 1494, 1496, 1511, 1698, 1962.
5. PROBLEME PROPUSE: 2361 - 2368.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebue să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946) este de 700 (șapte sute) lei. Un număr 80 lei.

„R. M. T." mulțumește D-lui Ing. *C. Stan* din Cluj, vechi colaborator distins, pentru contribuția benevolă de 5000 lei.

Orice contribuție de acest fel este binevenită în aceste timpuri când tiparul este foarte scump și când Revista este amenințată în existența ei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Politehnica, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Politehnica, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broșate, 1000 lei fiecare.

ANUL XXV — No. 8. TIMISOARA, OCTOMVRIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

O CLASĂ SPECIALĂ DE FORME NEDETERMINATE

DE

V. ALACI.

(Urmare)

II. Cazul triunghiului echilateral.

Fie expresia

$$(10) \qquad G = \frac{f(a, b, c, B, C)}{\varphi(a, b, c, B, C)},$$

în care f și φ sunt funcții de elementele unui triunghiu oarecare ABC.

Presupunem că triunghiul ABC este echilateral și atunci expresia (10) ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, pentru $b = a$, $c = a$, $C = B$, dacă sunt împlinite condițiile:

$$(11) \qquad \begin{cases} f(a, a, a, B, B) = 0 \\ \varphi(a, a, a, B, B) = 0. \end{cases}$$

Vom observa încă, că variabilele b, c, C nu sunt independente, de oarece, din teorema sinusurilor, rezultă că ele satisfac relațiile

$$(12) \qquad \begin{cases} b \sin(B + C) - a \sin B = 0 \\ c \sin(B + C) - a \sin C = 0 \end{cases}$$

Așa dar, pentru $b = a$, $c = a$, $C = B$, soluții ale sistemului (12), expresia (10), în virtutea relațiilor (11), ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Ne propunem a afla în aceste condiții, adevărata valoare a expresiei (10) *pentru* $c = a$, $b = a$, $C = B$ *soluții ale sistemului* (12).

Chestiunea astfel pusă, poate fi încadrată în studiul expus de noi în „R. M. T." [1], unde am stabilit regula:

Adevărata valoare a unei expresii

$$u = \frac{f(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)},$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, *soluții ale sistemului*

$$\begin{cases} A(x, y, z) = 0 \\ B(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

este câtul între determinanții funcționali ai funcțiilor $f(x, y, z)$, $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ și $\varphi(x, y, z)$, $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ *adică*

$$u = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}},$$

pentru $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, *când această valoare este determinată.*

În virtutea acestei reguli, rezultă că *adevărata valoare a expresiei* (10) *pentru* $b = a$, $c = a$, $C = B$, *soluții ale sistemului* (12), *este*

$$(B) \qquad G = \left[\frac{\begin{vmatrix} f'_b & f'_c & f'_C \\ \sin(B + C) & 0 & b\cos(B + C) \\ 0 & \sin(B + C) & c\cos(B + C) - a\cos C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_b & \varphi'_c & \varphi'_C \\ \sin(B + C) & 0 & b\cos(B + C) \\ 0 & \sin(B + C) & c\cos(B + C) - a\cos C \end{vmatrix}} \right]_{\substack{b = a \\ c = a \\ C = B}}$$

[1]) *V. Alaci.* O clasă de expresii nedeterminate „R. M. T.", Vol. IV, p. 20.

Aplicații.

Problema 1-a. *Să se arate că într'un triunghiu echilateral* A B C, *avem relațiile*

$$\text{(13)}\qquad \boxed{\frac{b^m \sin^p C - (2a^m - c^m)\sin^p B}{b^n \sin^q C - (2a^n - c^n)\sin^p B} = \frac{p+3m}{q+3n}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{p-q} a^{m-n}},$$

$$\text{(14)}\qquad \boxed{\frac{b^m \cos^p C - (2a^m - c^m)\cos^p B}{b^n \cos^q C - (2a^n - c^n)\cos^q B} = \frac{m-p}{n-q}\cdot\frac{a^{m-n}}{2^{p-q}}}.$$

Prima soluție. Însemnăm cu G și G_1 primii membrii ai relațiilor (13) și (14). În cazul triunghiului echilateral, adică pentru $b=a$, $c=a$, $C=B$, observăm că expresiile G și G_1 i-au forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și că aceste valori $b=c=a$, $C=B$, sunt în același timp soluții ale sistemului

$$\text{(15)}\qquad \begin{cases} b\sin(B+C) - a\sin B = 0 \\ c\sin(B+C) - a\sin C = 0, \end{cases}$$

dedus din teorema sinusurilor.

Conform teoriei expuse, concretizată în formula (B), *rezultă că adevărata valoare a expresiei* G, *pentru* $b=c=a$, $C=B$, *este*

$$G = \frac{\begin{vmatrix} m a^{m-1}\sin^p B & m a^{m-1}\sin^p B & p a^m \sin^{p-1} B\cos B \\ \sin 2B & 0 & a\cos 2B \\ 0 & \sin 2B & a\cos 2B - a\cos B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n a^{n-1}\sin^q B & n a^{n-1}\sin^q B & q a^n \sin^{q-1} B\cos B \\ \sin 2B & 0 & a\cos 2B \\ 0 & \sin 2B & a\cos 2B - a\cos B \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} m\sin B & m\sin B & p\cos B \\ \sin 2B & 0 & \cos 2B \\ 0 & \sin 2B & \cos 2B - \cos B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n\sin B & n\sin B & q\cos B \\ \sin 2B & 0 & \cos 2B \\ 0 & \sin 2B & \cos 2B - \cos B \end{vmatrix}} a^{m-n}\sin^{p-q} B = \frac{\begin{vmatrix} m & m & p\cos B \\ 2\cos B & 0 & \cos 2B \\ 0 & 2\cos B & \cos 2B - \cos B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & n & q\cos B \\ 2\cos B & 0 & \cos 2B \\ 0 & 2\cos B & \cos 2B - \cos B \end{vmatrix}} \cdot a^{m-n}\sin^{p-q} B,$$

Triunghiul ABC fiind echilateral, avem $B = 60^0$, deci $\cos B = \frac{1}{2}$, $\cos 2B = -\frac{1}{2}$, astfel că, *adevărata valoare a lui* G *este*

$$G = \frac{\begin{vmatrix} m & m & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & n & \frac{q}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{p-q} a^{m-n} = \frac{\frac{p}{2} + \frac{m}{2} + m}{\frac{q}{2} + \frac{n}{2} + n}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{p-q} a^{m-n} = \frac{p+3m}{q+3n}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{p-q} a^{m-n}.$$

Avem stabilită astfel relația (13).

Caz particular, $m=2$, $p=n=q=1$. În acest caz relația (13) devine

$$\boxed{\frac{b^2\sin C-(2a^2-c^2)\sin B}{b\sin C-(2a-c)\sin B}=\frac{7a}{4}}.$$

Trecem acum la stabilirea relației (14). Tot conform formulei (B), putem scri

$$G_1=\frac{\begin{vmatrix} m a^{m-1}\cos^p B & m a^{m-1}\cos^p B & -p a^m\cos^{p-1}B\sin B\\ \sin 2B & 0 & a\cos 2B\\ 0 & \sin 2B & a\cos 2B-a\cos B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n a^{n-1}\cos^q B & n a^{n-1}\cos^q B & -q a^n\cos^{q-1}B\sin B\\ \sin 2B & 0 & a\cos 2B\\ 0 & \sin 2B & a\cos 2B-a\cos B\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} m\cos B & m\cos B & -p\sin B\\ \sin 2B & 0 & \cos 2B\\ 0 & \sin 2B & \cos 2B-\cos B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n\cos B & n\cos B & -q\sin B\\ \sin 2B & 0 & \cos 2B\\ 0 & \sin 2B & \cos 2B-\cos B\end{vmatrix}}a^{m-n}\cos^{p-q}B$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} m & m & -p\sin B\\ 2\sin B & 0 & \cos 2B\\ 0 & 2\sin B & \cos 2B-\cos B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & n & -q\sin B\\ 2\sin B & 0 & \cos 2B\\ 0 & 2\sin B & \cos 2B-\cos B\end{vmatrix}}a^{m-n}\cos^{p-q}B=\frac{\begin{vmatrix} m & m & -\frac{p\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \sqrt{3} & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & n & -\frac{q\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \sqrt{3} & -1\end{vmatrix}}\cdot\frac{a^{m-n}}{2^{p-q}}$$

$$=\frac{-\frac{3p\sqrt{3}}{2}+\frac{m\sqrt{3}}{2}+m\sqrt{3}}{-\frac{3q\sqrt{3}}{2}+\frac{n\sqrt{3}}{2}+n\sqrt{3}}\cdot\frac{a^{m-n}}{2^{p-q}}$$

fiindcă triunghiul fiind echilateral, deci $B=60^0$, am înlocuit $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B=\frac{1}{2}$, $\cos 2B=-\frac{1}{2}$.

Prin urmare rezultă,

$$G_1=\frac{m-p}{n-q}\cdot\frac{a^{m-n}}{2^{p-q}}.$$

Avem stabilită astfel și relația (14).

Caz particular, $m=3$, $p=1$, $n=2$, $q=1$. În acest caz relația (14) devine

$$\boxed{\frac{b^3\cos C-(2a^3-c^3)\cos B}{b^2\cos C-(2a^2-c^2)\cos B}=2a}.$$

Soluția 2-a. În virtutea relațiilor

$$b=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)},\qquad c=\frac{a\sin C}{\sin(B+C)},$$

deduse din teorema sinusurilor, primii membrii a-i relațiilor (13) și (14) notați respectiv cu G și G_1, devin după unele simplificări:

$$(16)\qquad G=\frac{\sin^m B\sin^p C-2\sin^p B\sin^m(B+C)+\sin^m C\sin^p B}{\sin^n B\sin^q C-2\sin^q B\sin^n(B+C)+\sin^n C\sin^q B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}(B+C),$$

$$(17)\qquad G_1=\frac{\sin^m B\cos^p C-2\cos^p B\sin^m(B+C)+\sin^m C\cos^p B}{\sin^n B\cos^q C-2\cos^q B\sin^n(B+C)+\sin^n C\cos^q B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}(B+C),$$

Cum prin ipoteză triunghiul ABC este echilateral, deci $C=B=60^0$, observăm că primii factori din (16) și (17) i-au forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, fiindcă devin respectiv

$$\frac{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{m+p}-2\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{m+p}+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{m+p}}{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{n+q}-2\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{n+q}+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{n+q}},\qquad \frac{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{m}\cdot\frac{1}{2^p}-2\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{m}+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{m}\cdot\frac{1}{2^p}}{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2^q}-2\cdot\frac{1}{2^q}\cdot\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{n}+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2^q}}.$$

Prin urmare, primii factori din relațiile (16) și (17) pentru C = B, i-au forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și conform regulei lui *L'Hôspital, adevăratele valori ale lui* G *și* G_1 *sunt:*

$$G=\left[\frac{p\sin^m B\sin^{p-1}C\cos C-2m\sin^p B\sin^{m-1}(B+C)\cos(B+C)+m\sin^{m-1}C\cos C\sin^p B}{q\sin^n B\sin^{q-1}C\cos C-2n\sin^q B\sin^{n-1}(B+C)\cos(B+C)+n\sin^{n-1}C\cos C\sin^q B}\right]_{C=B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}2B$$

$$=\frac{p\sin^{m+p-1}B\cos B-2m\sin^p B\sin^{m-1}2B\cos 2B+m\sin^{m+p-1}B\cos B}{q\sin^{n+q-1}B\cos B-2n\sin^q B\sin^{n-1}2B\cos 2B+n\sin^{n+q-1}B\cos B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}2B,$$

deci

$$(18)\qquad G=\frac{p\cos B-2m(2\cos B)^{m-1}\cos 2B+m\cos B}{q\cos B-2n(2\cos B)^{n-1}\cos 2B+n\cos B}\cdot a^{m-n}\cdot\sin^{m+p-n-q}B,\ \sin^{n-m}2B,$$

iar

$$G_1=\left[\frac{-p\sin^m B\cos^{p-1}C\sin C-2m\cos^p B\sin^{m-1}(B+C)\cos(B+C)+m\sin^{m-1}C\cos C\cos^p B}{-q\sin^n B\cos^{q-1}C\sin C-2n\cos^q B\sin^{n-1}(B+C)\cos(B+C)+n\sin^{n-1}C\cos C\cos^q B}\right]_{C=B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}2B$$

$$=\frac{-p\sin^{m+1}B\cos^{p-1}B-2m\cos^p B\sin^{m-1}2B\cos 2B+m\sin^{m-1}B\cos^{p+1}B}{-q\sin^{n+1}B\cos^{q-1}B-2n\cos^q B\sin^{n-1}2B\cos 2B+n\sin^{n-1}B\cos^{q+1}B}\cdot a^{m-n}\cdot\sin^{n-m}2B,$$

sau

$$(19)\qquad G_1=\frac{-p\sin^2 B-2m\cos B(2\cos B)^{m-1}\cos 2B+m\cos^2 B}{-q\sin^2 B-2n\cos B(2\cos B)^{n-1}\cos 2B+n\cos^2 B}\cdot a^{m-n}\cdot\sin^{m-n}B\cdot\cos^{p-q}B\sin^{n-m}2B.$$

Cum $B=60^0$, rezultă că relațiile (18) și (19) devin respectiv

$$G=\frac{\frac{p}{2}+m+\frac{m}{2}}{\frac{q}{2}+n+\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{p-q}\cdot a^{m-n}=\frac{p+3m}{q+3n}\cdot\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{p-q}\cdot a^{m-n},$$

$$G_1=\frac{-\frac{3p}{4}+\frac{m}{2}+\frac{m}{4}}{-\frac{3q}{4}+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{2^{p-q}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-m}\cdot a^{m-n}=\frac{m-p}{n-q}\cdot\frac{a^{m-n}}{2^{p-q}}\cdot$$

Am stabilit deci şi pe această cale relaţiile (13) şi (14).

Problema 2 a. *Să se arate că într'un triunghiu echilateral* ABC, *avem relaţia:*

$$\boxed{\frac{b^m\operatorname{tg}^p C-(2a^m-c^m)\operatorname{tg}^p B}{b^n\operatorname{tg}^q C-(2a^n-c^n)\operatorname{tg}^q B}=\frac{4p+3m}{4q+3n}\cdot(\sqrt{3})^{p-q}\cdot a^{m-n}}\quad(20)$$

Soluţie. Însemnăm cu H primul membru al relaţiei (20).

În cazul triunghiului echilateral ABC, adică pentru $b=c=a$, $C=B$, observăm că expresia H ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ şi că aceste valori $b=c=a$, $C=B$ sunt în acelaşi timp soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} b\sin(B+C)-a\sin B=0\\ c\sin(B+C)-a\sin C=0,\end{cases}\quad(21)$$

dedus din teorema sinusurilor.

În virtutea teoriei expuse, concretizată în formula (B), *rezultă că adevărata valoare a expresiei* H, *pentru* $b=c=a$, $C=B$, *este*

$$H=\frac{\begin{vmatrix} ma^{m-1}\operatorname{tg}^p B & ma^{m-1}\operatorname{tg}^p B & pa^m\operatorname{tg}^{p-1}B\cdot\frac{1}{\cos^2 B}\\ \sin 2B & 0 & a\cos 2B\\ 0 & \sin 2B & a\cos 2B-a\cos B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} na^{n-1}\operatorname{tg}^q B & na^{n-1}\operatorname{tg}^q B & qa^n\operatorname{tg}^{q-1}B\cdot\frac{1}{\cos^2 B}\\ \sin 2B & 0 & a\cos 2B\\ 0 & \sin 2B & a\cos 2B-a\cos B\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} m\operatorname{tg}B & m\operatorname{tg}B & \frac{p}{\cos^2 B}\\ \sin 2B & 0 & \cos 2B\\ 0 & \sin 2B & \cos 2B-\cos B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n\operatorname{tg}B & n\operatorname{tg}B & \frac{q}{\cos^2 B}\\ \sin 2B & 0 & \cos 2B\\ 0 & \sin 2B & \cos 2B-\cos B\end{vmatrix}}\cdot a^{m-n}\operatorname{tg}^{p-q}B.$$

Ţinând seamă că $B=60^0$, mai putem scri

$$H=\frac{\begin{vmatrix} m\sqrt{3} & m\sqrt{3} & 4p\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n\sqrt{3} & n\sqrt{3} & 4q\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1\end{vmatrix}}\cdot(\sqrt{3})^{p-q}\cdot a^{m-n}=\frac{3p+\frac{3m}{4}+\frac{3m}{2}}{3q+\frac{3n}{4}+\frac{3n}{2}}(\sqrt{3})^{p-q}\cdot a^{m-n}=$$

$$\frac{4p+3m}{4q+3n}(\sqrt{3})^{p-q}\cdot a^{m-n}.$$

Caz particular, $p=3$, $q=1$, $m=2$, $n=1$. În acest caz relaţia (20) devine

$$\boxed{\frac{b^2\operatorname{tg}^3 C-(2a^2-c^2)\operatorname{tg}^3 B}{b\operatorname{tg}C-(2a-c)\operatorname{tg}B}=\frac{54a}{7}}.$$

Soluția 2-a. În virtutea relațiilor

$$b=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)},\qquad c=\frac{a\sin C}{\sin(B+C)},$$

deduse din teorema sinusurilor, primul membru al relației (20), notat cu H, devine după unele simplificări

$$(22)\qquad H=\frac{\sin^m B\,\mathrm{tg}^p C-2\,\mathrm{tg}^p B\sin^m(B+C)+\sin^m C\,\mathrm{tg}^p B}{\sin^n B\,\mathrm{tg}^q C-2\,\mathrm{tg}^q B\sin^n(B+C)+\sin^n C\,\mathrm{tg}^q B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}(B+C).$$

Cum prin ipoteză triunghiul A B C este echilateral, deci $C=B=60^0$, observăm că primul membru din (22) ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, fiindcă devine

$$\frac{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^m\cdot(\sqrt3)^p-2(\sqrt3)^p\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^m+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^m(\sqrt3)^p}{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n\cdot(\sqrt3)^q-2(\sqrt3)^q\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n(\sqrt3)^q}\cdot$$

Prin urmare primul factor din relația (22) pentru $C=B$, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și conform regulei lui *L'Hôspital*, *adevărata valoare a lui* H *este*:

$$H=\left[\frac{p\sin^m B\,\mathrm{tg}^{p-1}C\frac{1}{\cos^2B}-2m\,\mathrm{tg}^p B\sin^{m-1}(B+C)\cos(B+C)+m\sin^{m-1}C\cos C\,\mathrm{tg}^p B}{q\sin^n B\,\mathrm{tg}^{q-1}C\frac{1}{\cos^2C}-2n\,\mathrm{tg}^q B\sin^{n-1}(B+C\cos(B+C)+n\sin^{n-1}C\cos C\,\mathrm{tg}^q B}\right]_{C=B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}2B$$

$$=\frac{p\sin^m B\,\mathrm{tg}^{p-1}B-2m\,\mathrm{tg}^p B\sin^{m-1}2B\cos2B\cos^2B+m\sin^{m-1}B\cos^3B\,\mathrm{tg}^p B}{q\sin^n B\,\mathrm{tg}^{q-1}B-2n\,\mathrm{tg}^q B\sin^{n-1}2B\cos2B\cos^2B+n\sin^{n-1}B\cos^3B\,\mathrm{tg}^q B}\cdot a^{m-n}\sin^{n-m}2B,$$

sau

$$(23)\qquad H=\frac{p\sin B-2m\,\mathrm{tg}\,B(2\cos B)^{m-1}\cos2B\cos^2B+m\cos^3B\,\mathrm{tg}\,B}{q\sin B-2n\,\mathrm{tg}\,B(2\cos B)^{n-1}\cos2B\cos^2B+n\cos^3B\,\mathrm{tg}\,B}a^{m-n}\sin^{m-n}B\,\mathrm{tg}^{p-q}B\sin^{n-m}2B.$$

Cum $B=60^0$, rezultă că relația (23) devine

$$H=\frac{\frac{p\sqrt3}{2}-2m\sqrt3\left(-\frac12\right)\cdot\frac14+\frac{m\sqrt3}{8}}{\frac{q\sqrt3}{2}-2n\sqrt3\left(-\frac12\right)\cdot\frac14+\frac{n\sqrt3}{8}}\cdot a^{m-n}\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{m-n}\cdot(\sqrt3)^{p-q}\cdot\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{n-m}=\frac{4p+3m}{4q+3n}\cdot(\sqrt3)^{p-q}a^{m-n}$$

Avem astfel stabilită și pe această cale relația (20).

Observare. Putem propune și soluționa oricâte probleme de felul celor tratate până aci și ele pun în evidență remarcabile identități valabile pentru triunghiul isoscel sau echilateral.

NOTE MATEMATICE

17. — *Sur quelques identités.*

A. *Trouver des expressions de* P, P′, Q, Q′, R, R′ *de manière que* $P^2-P'^2+Q^2-Q'^2+R^2-R'^2$ *soit représentable algébriquement de 8 façons par une différence de deux carrés.*

Considérons l'identité

$$(1)\qquad x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=(z-x)(z-y)(x-y)(x+y+z),$$

qui revêt la forme

$$p\,p'+q\,q'+r\,r'=s\,s'.$$

Posons

$$2p=P+P',\quad 2p'=P\quad P'\ \text{etc.},$$

et déterminons ainsi P, P′ etc.

Nous trouvons

$$(x^3+y-z)^2-(x^3-y+z)^2+(y^3+z-x)^2-(y^3-z+x)^2+(z^3+x-y)^2-(z^3-x+y)^2=$$

$$\text{I}\quad [(z-x)(z-y)(x-y)(x+y+z)+1]^2-[(z-x)(z-y)(x-y)(x+y+z)-1]^2=$$

$$\text{II}\quad [(z-y)(x-y)(x+y+z)+z-x]^2-[(z-y)(x-y)(x+y+z)-z+x]^2=$$

$$\text{III}\quad [(z-x)(x-y)(x+y+z)+z-y]^2-[(z-x)(x-y)(x+y+z)-z+y]^2=$$

$$\text{IV}\quad [(z-x)(z-y)(x+y+z)+x-y]^2-[(z-x)(x-y)(x+y+z)-x+y]^2=$$

$$\text{V}\quad [[z-x)(z-y)(x+y)+x+y+z]^2-[(z-x)(z-y)(x-y)-x-y-z]^2=$$

$$\text{VI}\quad [(z-x)(z-y)+(x-y)(x+y+z)]^2-[(z-x)(z-y)-(x-y)(x+y+z)]^2=$$

$$\text{VII}\quad [(z-x)(x-y)+(z-y)(x+y+z)]^2-[(z-x)(x-y)-(z-y)(x+y+z)]^2=$$

$$\text{VIII}\quad [(z-y)(x-y)+(z-x)(x+y+z)]^2-[(z-y)(x-y)-(z-x)(x+y+z)]^2.$$

Exemples:

a) $x=3,\quad y=2,\quad z=1,$

$$28^2-26^2+6^2-10^2+2^2=13^2-11^2=8^2-4^2=7^2-1^2.$$

b) $x=4,\quad y=2,\quad z=1,$

$$65^2-63^2+5^2-11^2+3^2-1^2=43^2-41^2=$$

$$17^2-11^2=13^2-1^2=23^2-19^2.$$

c) $x=5,\quad y=4,\quad z=3,$

$$126^2-124^2+62^2-66^2+28^2-26^2=25^2-23^2=14^2-10^2.$$

Pour a) et b) nous avons les représentations $S^2-S'^2$ qui sont arithmétiquement possibles.

Pour c) nous avons aussi

$$126^2-124^2+62^2-66^2+28^2-26^2=25^2-23^2=$$

$$14^2-10^2=10^2-2^2=11^2-5^2.$$

Remarquons que le nombre de représentations, arithmétiquement possibles, de $P^2-P'^2+Q^2-Q'^2+R^2-R'^2$, par la forme $S^2-S'^2$ peut être supérieur a celui donné à l'aide de nos identités.

B. De l'identité

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(y-z)(z-x)(x-y),$$

on déduit les suivantes:

$$[(x-y)^3+1]^2-[(x-y)^3-1]^2+[(y-z)^3+1]^2-[(y-z)^3-1]^2+[(z-x)^3+1]^2-[(z-x)^3-1]^2=$$

$$[(x-y)^2+x-y]^2-[(x-y)^2-x+y]^2+[(y-z)^2+y-z]^2-[(y-z)^2-y+z]^2+[(z-x)^2+z-x]^2-[(z-x)^2-z+x]^2=$$

$$\text{I}\quad [3(y-z)(z-x)(x-y)+1]^2-[3(y-z)(x-x)(x-y)-1]^2=$$

$$\text{II}\quad [(y-z)(z-x)(x-y)+3]^2-[(y-z)(z-x)(x-y)-3]^2=$$

$$\text{III}\quad [3(z-x)(x-y)+y-z]^2-[3(z-x)(x-y)-y+z]^2=$$

$$\text{IV}\quad [3(y-z)(x-y)+z-x]^2-[3(y-z)(x-y)-z+x]^2=$$

$$\text{V}\quad [3(y-z)(z-x)+x-y]^2-[3(y-z)(z-x)-x+y]^2=$$

$$\text{VI}\quad [3(y-z)+(z-x)(x-y)]^2-[3(y-z)-(z-x)(x-y)]^2=$$

$$\text{VII}\quad [3(z-x)+(y-z)(x-y)]^2-[3(z-x)-(y-z)(x-y)]^2=$$

$$\text{VIII}\quad [3(x-y)+(y-z)(z-x)]^2-[3(x-y)-(y-z)(z-x)]^2.$$

Exemple:

$$x=5,\quad y=2,\quad z=1,$$

$$28^2-26^2+2^2+63^2-65^2=12^2-6^2+2^2+12^2-20^2=$$

$$9^2-15^2=35^2-37^2=5^2-13^2.$$

On a encore:

$$-144=16^2-20^2.$$

C. Si $pp'+qq'+rr'=ss'=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$, on a pour le nombre de représentations $S^2-S'^2$ algébriquement possibles la formule

$$C_{4,0}+C_{4,1}+\frac{C_{4,2}}{2}=1+4+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 2}=8.$$

D'une manière générale si le produit ss' et formé

d'un nombre pair, $2n$, de facteurs,

$$C_{2n,0}+C_{2n,1}+C_{2n,2}+\cdots+\frac{C_{2n,n}}{2}.$$

Par exemple, pour $n=6$, le nombre de représentations $S^2-S'^2$ est égal à $1+6+15+10=32$.

D. Si, dans l'identité (1) on remplace x par X^2, y par Y^2, z par Z^2, elle devient:

$$X^6(Y^2-Z^2)+Y^6(Z^2-X^2)+Z^6(X^2-Y^2)=$$

$$(Z+X)(Z-X)(Z+Y)(Z-Y)(X+Y)(X-Y)(X^2+Y^2+Z^2).$$

On en déduit une représentation de

$$(X^6+Y^2-Z^2)^2-(X^6-Y^2+Z^2)^2+(Y^6+Z^2-X^2)^2-$$

$$(Y^6-Z^2+X^2)^2+(Z^6+X^2-Y^2)^2-(Z^6-X^2+Y^2)^2.$$

par la forme $S^2-S'^2$ de

$$C_{7,0}+C_{7,1}+C_{7,2}+C_{7,3}=1+7+21+35=64$$

façons différentes.

D'une manière générale, on a pour un nombre impair $(2n+1)$ de facteurs du produit ss' le nombre suivant de représentations algébriques par la forme $S^2-S'^2$:

$$C_{2n+1,0}+C_{2n+1,1}+\cdots C_{2n+1,n}.$$

V. Nous avons les relations suivantes: qui sont connues:

$$\begin{cases} C_{2n,0}+C_{2n,1}+\cdots+\dfrac{C_{2n,n}}{2}=2^{2n-1} \\ C_{2n+1,0}+C_{2n+1,1}+\cdots C_{2n+1,n}=2^{2n}. \end{cases}$$

A. GLODEN

---

18. — *Asupra transformării unor expresiuni iraționale.*

Formulele cunoscute, cari definesc, pentru cazurile de posibilitate, transformarea expresiilor de forma $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ cu $a>\sqrt{b}>0$, într'o sumă algebrică de două iraționale simple, se pot stabili pe o cale interesantă, deosebită de cea clasică și asupra căreia vrem să atragem atențiunea, dat fiind mai ales că, după cât se pare, această cale nu este cunoscută.

Pentru simplificare, vom reuni cele două expresiuni de mai sus în următoarea expresie unică:

$$(1)\qquad x=\sqrt{a+\varepsilon\sqrt{b}},\quad(\varepsilon=\pm1)$$

de unde, prin ridicare la patrat, obținem:

$$(2)\qquad x^2=a+\varepsilon\sqrt{b},\quad(\varepsilon=\pm1)$$

și făcând substituția:

$$(3)\qquad x=y+\frac{\varepsilon\sqrt{b}}{2y},$$

deducem ecuația bipatrată:

$$(4)\qquad 4y^4-4ay^2+b=0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$(5)\quad\begin{cases} y_1'=-y_2'=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \\ y_1''=-y_2''=\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \end{cases}$$

Să demonstrăm că acestor patru valori ale lui y, le corespund numai două valori distincte pentru x, cari și ele nu diferă, la rândul lor, decât prin semn.

Pentru aceasta vom înlocui valorile lui y din (5) în relația (3), ținând în acelaș timp seama că:

$$(6)\qquad y_1'y_1''=y_2'y_2''=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ceeace rezultă cu ușurință tocmai din relațiile (5).

Obținem astfel următoarele valori corespunzătoare ale lui x:

$$(7)\quad\begin{cases} x_1'=-x_2'=y_1'+\varepsilon y_1''=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\varepsilon\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \\ x_1''=-x_2''=y_1''+\varepsilon y_1'=\varepsilon\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \end{cases}$$

notațiile fiind respectiv corespunzătoare și ele notațiilor analoage ale valorilor lui y.

Pe formulele (7) se vede clar că, dacă $\varepsilon=+1$, atunci

$$(8)\quad x_1'=x_1''=-x_2'=-x_2''=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

iar dacă $\varepsilon=-1$, atunci

$$(8')\quad x_1'=x_2''=-x_2'=-x_1''=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

ceeace învederează pentru ambele cazuri că celor patru valori ale lui y din (5) le corespund exclusiv două valori pentru x date de ecuația (2).

Reținând din aceste valori pe cele pozitive, cari singure ne interesează, deoarece în (1) radicalul se consideră aritmetic, deducem, strângând și rezultatele, că rădăcina pozitivă a ecuației (2) este:

(9) $$x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\varepsilon\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\quad(\varepsilon=\pm1)$$

de unde, comparând apoi cu (1), obținem explicit:

10 $$\boxed{\sqrt{a+\varepsilon\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\varepsilon\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\ (\varepsilon=\pm1),}$$

adică chiar formula cunoscută, care permite transformarea expresiei din primul membru al ei într'o sumă de două iraționale simple pentru cazul când expresia a^2-b este un patrat perfect și evident, în ipoteza $a>\sqrt{b}>0$.

EUGEN VISA

---

19. — *Asupra formulei unghiului de ochire.*

În R. M. T. din Ianuarie 1943, pag. 129, unghiul de ochire este dat de următoarea formulă:

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{v\sin i}{V-v\cos i}$, v = viteza navei, V = viteza torpilei, i = unghiul de incidență.

$$1+\operatorname{tg}\alpha=\frac{V-v\cos i+v\sin i}{V-v\cos i}$$

(1) $$sp\,\alpha=\frac{v\sin i}{V+v(\sin i-\cos i)},$$

$$sp\,\alpha=\frac{v\sin i}{V-v+v(1+\sin i-\cos i)}+\frac{v\sin i}{V-v+\dfrac{v\sin i}{cp\,\dfrac{i}{2}}}$$

(2) $$sp\,\alpha=\frac{v}{\dfrac{V-v}{\sin i}+\dfrac{v}{cp\,\dfrac{i}{2}}}.$$

Formula (1) este valabilă pentru $0\leq\alpha\leq90$; formula (2) este valabilă pentru $0\leq\alpha$, $i\leq90^0$.

LT C-DOR C. V. COSTACHESCU

BIBLIOGRAFIE

Știință și Progres, Anul X, Nr. 8—9, Iunie—Iulie 1945

Asupra regulelor de divizibilitate, de *Petre Sergescu*. Asupra punctelor inverse în tetraedru, de *D. V. Ionescu*. Asupra triunghiurilor înscrise într'un cerc dat și circumscrise altui cerc dat, de *C. Coșniță*. O chestiune de examen, de *N. Mihăileanu*.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1299. — *Într'un poligon cu n laturi se duc perpendiculare din fiecare vârf pe toate dreptele ce se pot forma cu celelalte* $(n-1)$ *vârfuri.*

Câte puncte de intersecție, la distanță finită, rezultă din întretăerea dreptelor astfel obținute, dacă nu se ține seamă de vârfurile poligonului?

GH. D. SIMIONESCU

Soluția autorului. Cu $(n-1)$ puncte se pot forma C^2_{n-1} drepte.

Fiind n vârfuri vom avea un număr total de drepte:

$$N=n\,C^2_{n-1}.$$

Numărul de puncte rezultate din întretăerea acestor drepte va fi:

$$A=C^2_N=\frac{n\,C^2_{n-1}(n\,C^2_{n-1}-1)}{2}.$$

Din acestea trebue să scădem:

a) Punctele de intersecție confundate în vârfuri. În fiecare vârf sunt C^2_{n-2} drepte deci:

$$A'_1=\frac{C^2_{n-1}(C^2_{n-1}-1)}{2}$$

puncte. Fiind n vârfuri avem

$$A_1=\frac{n\,C^2_{n-1}(C^2_{n-1}-1)}{2}$$

puncte în total.

b) Grupuri de câte trei drepte sunt concurente în ortocentrele triunghiurilor ce se pot forma cu cele n vârfuri. Deci în ortocentru vin de se confundă încă două puncte, care vor trebui scăzute din total.

Avem în total C^3_n triunghiuri și tot atâtea ortocentre. Va trebui să scădem: $2\,C^3_n$ puncte,

$$A_2=2\,C^3_n.$$

c) Punctele la infinit. Pe fiecare dreptă cad perpendicular $(n-2)$ drepte din cele $(n-2)$ vârfuri rămase. Acestea dau C^2_{n-2} puncte la infinit confundate. Cu n puncte se formează C^2_n drepte, deci numărul total de puncte la infinit va fi:

$$A_3=C^2_n\,C^2_{n-2}.$$

Numărul de puncte distincte la distanţă finită rămâne:

$$A - A_1 - A_2 - A_3 = \frac{n C_{n-1}^2 (n C_{n-1}^2 - 1)}{2} -$$

$$\frac{n C_{n-1}^2 (C_{n-1}^2 - 1)}{2} - 2C_n^3 - C_n^2 C_{n-2}^2 = 6C_n^2 C_n^4 + C_n^3.$$

Pentru $n = 4$ avem 40 puncte distincte
Pentru $n = 5$ avem 310 puncte distincte.

Soluţii parţiale date de d-nii: *Apostol Radu* (Lic Milit. N. Filipescu), *Jidanu C.* (Lic. Beiuş) şi *Postelnicescu C. M.* (Lic. Milit., N Filipescu).

Problema 1494. — *Să se stabilească identitatea*

$$\sin 5\alpha - \sin 4\alpha + \sin 2\alpha - \sin \alpha = \frac{\sin 6\alpha}{1 + 2\cos \alpha}.$$

V. ALACI

Soluţie. Notând cu E primul membru al identităţii, putem scri succesiv

(1) $E = \sin 5\alpha - \sin \alpha - (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) =$

$$2\sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2\sin \alpha \cos 3\alpha = 2\cos 3\alpha (\sin 2\alpha - \sin \alpha) =$$

$$4\cos 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{2\cos 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}} =$$

$$\frac{2\cos 3\alpha \sin 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}} = \frac{\sin 6\alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{3\sin \frac{\alpha}{2} - 4\sin^3 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 6\alpha}{3 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Cum,

$$2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha,$$

relaţia (1) devine

$$E = \frac{\sin 6\alpha}{3 - 2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin 6\alpha}{1 + 2\cos \alpha}.$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Cristea I. Nicolae* (Lic. Blaj), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Ionescu Petre* (Colegiul „Carol", Craiova), *Modâlcă Emil* (Lic. T-Severin) şi *Rusu Mircea* (student, Cluj).

Problema 1496. — *Să se stabilească într'un triunghiu relaţiile*

$$a^2 \cos 2(B - C) + b^2 \cos 2B + c^2 \cos 2C + 2bc \cos (B - C) =$$
$$2a[b \cos (2B - C) + c \cos (2C - B)],$$

$$a^2 \sin 2(B - C) + b^2 \sin 2B - c^2 \sin 2C + 2bc \sin (B - C) =$$
$$2a[b \sin (2B - C) - c \sin (2C - B)].$$

N. N. MIHAILEANU

Soluţie. Însemnăm cu E şi E_1 membrii al 2-lea ai relaţiilor date şi ţinând seamă că într'un triunghiu oarecare ABC, avem

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

putem scri:

(1) $E = 2(b \cos C + c \cos B)[b \cos (2B - C) + c \cos (2C - B)],$
$E_1 = 2(b \cos C + c \cos B)[b \sin (2B - C) - c \sin (2C - B)].$

Efectuând înmulţirile şi ţinând seamă de formulele de transformare

$$2\cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$$
$$2\cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta),$$

expresiile (1) devin

$$E = b^2 \cos 2B + b^2 \cos 2(B - C) + bc \cos (3C - B) +$$
$$bc \cos (B - C) + bc \cos (3B - C) + bc \cos (B - C) +$$
$$c^2 \cos 2C + c^2 \cos 2(B - C),$$

$$E_1 = b^2 \sin 2B + b^2 \sin 2(B - C) - bc \sin (3C - B) +$$
$$bc \sin (B - C) + bc \sin (3B - C) + bc \sin (B - C) -$$
$$c^2 \sin 2C + c^2 \sin 2(B - C),$$

sau

$$E = b^2 \cos 2B + c^2 \cos 2C + 2bc \cos (B - C) +$$
$$(b^2 + c^2) \cos 2(B - C) + bc[\cos (3B - C) + \cos (3C - B)],$$

$$E_1 = b^2 \sin 2B - c^2 \sin 2C + 2bc \sin (B - C) +$$
$$(b^2 + c^2) \sin 2(B - C) - bc[\sin (3C - B) - \sin (3B - C)].$$

Transformând suma de cosinusuri şi diferenţa de sinusuri în produse, putem scri succesiv

$$E = b^2 \cos 2B + c^2 \cos 2C + 2bc \cos (B - C) +$$
$$(b^2 + c^2) \cos 2(B - C) + 2bc \cos (B + C) \cos 2(B - C),$$

$$E_1 = b^2 \sin 2B - c^2 \sin 2C + 2bc \sin (B - C) +$$
$$(b^2 + c^2) \sin 2(B - C) + 2bc \cos (B + C) \sin 2(B - C).$$

Fiindcă,

$$\cos (B + C) = -\cos A,$$

expresiile E şi E_1 devin

$$E = b^2 \cos 2B + c^2 \cos 2C + 2bc \cos (B - C) +$$
$$(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \cos 2(B - C),$$

$$E_1 = b^2 \sin 2B - c^2 \sin 2C + 2bc \sin(B-C) + (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\sin 2(B-C).$$

Dar ştim că într'un triunghiu oarecare ABC există relaţia

$$b^2 + c^2 - bc\cos A = a^2,$$

astfel că expresiile E şi E_1 devin

$$E = b^2\cos 2B + c^2\cos 2C + 2bc\cos(B-C) + a^2\cos 2(B-C),$$

$$E_1 = b^2\sin 2B - c^2\sin 2C + 2bc\sin(B-C) + a^2\sin 2(B-C).$$

Avem stabilite astfel relaţiile cerute.

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (Lic. Loga, Timişoara), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Matei D-tru* (Iaşi), *Ştefănescu Nicolae* (Lic Milit., N. Filipescu), *Stoenescu Mirel* (Lic. Milit, N. Filipescu) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1511. — *Să se formeze ecuaţia algebrică ale cărei rădăcini sunt:*

$$x = \frac{\cos\frac{k\pi}{p} + 2\sin\frac{k\pi}{p}}{2\cos\frac{k\pi}{p} - \sin\frac{k\pi}{p}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

V. ALACI

Soluţie. Împărţind ambii termeni ai fracţiei prin $\cos\frac{k\pi}{p}$ avem:

$$x = \frac{1 + 2\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}}{2 - \operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

De aci deducem

$$(2+x)\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p} = 2x - 1,$$

de unde

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\frac{k\pi}{p} = \frac{2x-1}{2+x} = X.$$

De altă parte ştim[1] că ecuaţia care are rădăcinile

$$X = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

este

$$(1 + iX)^p - (1 - iX)^p = 0. \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Înlocuind X prin valoarea sa din (1) dată în funcţie de x, avem

$$\left[1 + \frac{i(2x-1)}{2+x}\right]^p - \left[1 - \frac{i(2x-1)}{2+x}\right]^p = 0,$$

sau

$$[(2+x) + i(2x-1)]^p - [2 + x - i(2x-1)]^p = 0$$

Aceasta este ecuaţia cerută.

Soluţii analoage date de d-nii: *Bakonyi C.* (Lic. Loga Timişoara), *Jidanu I. C-tin* (Bacău) şi *Rusu Mircea* (student, Cluj).

[1] *V. Alaci.* Articolul „O clasă de ecuaţii algebrice cu rădăcini funcţiuni trigonometrice", Gazeta Matematică vol. XVII, p. p. 401–407.

Problema 1698. — *Dacă* $x_1 = x_{n+1}$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})^5 = \text{mult. } 5.$$

SUB-LT. IOAN C SAVIN

Soluţie. Dezvoltând puterile din primul membru, avem

$$(x_k - x_{k+1})^5 = x_k^5 - 5x_k^4 x_{k+1} + 10x_k^3 x_{k+1}^2 - 10x_k^2 x_{k+1}^3 + 5x_k x_{k+1}^4 - x_{k+1}^5,$$

sau

$$(x_k - x_{k+1})^5 = \text{mult. } 5 + x_k^5 - x_{k+1}^5.$$

De aci rezultă

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})^5 = \text{mult.} 5 + \sum_{k=1}^{n} (x_k^5 - x_{k+1}^5).$$

Cum

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^5 - x_{k+1}^5) = x_1^5 - x_{n+1}^5 = 0, \text{ fiindcă } x_1 = x_{n+1},$$

relaţia (1) devine

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})^5 = \text{mult. } 5,$$

ceeace era de dovedit.

Soluţie dată de d-ra *Checian Ana* (Lic. Carmem Silva, Timişoara) şi de d-nii: *Aldea Minea* (Buzău), *Bakonyi C.* (Lic. Loga, Timişoara), *Bârlea Suhăţeanu* (Lic. Milit, N. Filipescu), *Boeru Alexandru* (Lic. Milit., N. Filipescu,) *Buznea Dinu* (Lic. Milit, N. Filipescu), *Chiriac C-tin*, *Cristea C-tin*, *Cristea Nicolae* (Blaj), *Dăscălescu Hristache* Focşani), *Doscan Alexandru* (Lic. Giurgiu), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gligor Ioan* (Lic. Arad), *Ionescu Petre* (Craiova), *Jidanu C-tin* (Lic. Beiuş), *Matei Chintescu* (Lic. Milit, N. Filipescu), *Negrea Mircea* (Brăila), *Păläceanu Vasile* (Lic. Milit, Timişoara), *Segal Zigu* (Vaslui), *Seban C-tin* (Lic Milit., N. Filipescu), *Stamate Ionel* (student, Cluj), *Stoenescu Mirel* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică Ştefan*, *Văduva Marin* (Lic. Giurgiu) şi *Vijelie Eugen* Lic. Milit, N. Filipescu).

Observare. D-l *Modâlcă Emil* (Lic. T-Severin) a dat următoarea generalizare. *Dacă* $x_1 = x_{n+1}$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k+1})^m = \text{mult. } m.$$

Problema 1962. — *Să se găsească numerele întregi a şi b al căror produs se obţine scriind unul după altul numerele* $a-1$ *şi* $b-1$.

G-L GH. BUICLIU

Soluţie. Fie n numărul cifrelor lui $b-1$. După enunţ avem

$$a \times b = (a-1)\,10^n + b - 1$$

$$(a-1)\,b = (a-1)\,10^n - 1.$$

Fiind vorba de numere întregi, egalitatea are loc numai dacă $a-1$ este 1, deci

$$a - 1 = 1 \quad *_{*}^{*} \quad a = 2$$

şi atunci

$$b = 10^n - 1.$$

Problema admite o infinitate de soluţii pentru b şi o singură valoare pentru a.

A dat această soluţie D-l *Luca L. Laurenţiu* (student Politehnica din Timişoara).

Nu citâm pe ceilalţi rezolvatori care s'au pus, fără justificare în ipoteza că a şi b sunt numere de o singură cifră.

Se rezolvă la fel problema în care se cere ca produsul $a \times b$ să se obţină scriind pe $\alpha \times b \pm s$ după $a - \alpha$.

G-l GH. B.

PROBLEME PROPUSE

2361. — Să se găsească un patrat perfect de opt cifre ştiind că primele grupe de câte două cifre sunt numere consecutive, iar ultima grupă de două cifre este un număr cu cifre egale.

G-L GH BUICLIU

2362. — Să se găsească un bipatrat de forma $\overline{abcba}$ ştiind că $\overline{ab} = 7c$.

I. A. BARBU

2363. — Să se determine valoarea lui a astfel încât polinomul

$$P(x) = am\,x^{m+2} - (2am + m + a - 1)\,x^{m+1} + (a+1)(m+1)\,x^m - (m - a + 1)\,x + m - a - 1$$

să fie divizibil cu $(x-1)^4$. Înlocuind apoi pe a cu valoarea găsită să se calculeze

$$\lim_{x=1} \frac{P(x)}{(x-1)^4}.$$

GH D. SIMIONESCU

2364. — Ştiind că $0 \leq x \leq 1$, se cere să se arate că funcţiile

$$y = \text{arc sp } x, \quad z = \text{arc tg } \frac{x-a}{1-a+(2a-1)x}$$

au aceiaşi derivată. Să se explice rezultatul

V ALACI

2365. — Fie E centrul unui paralelogram dat ABCD şi P, Q respectiv punctele de intersecţie ale bisectoarei unghiului AEB cu laturile opuse AD şi BC. Să se arate că dreptele BP şi AQ se întâlnesc pe simediana triunghiului ABE, corespunzătoare vârfului E.

MARIA NEUMANN

2366. — Considerăm punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $P(p, q)$. O dreaptă variabilă dusă prin P taie axele coordonate în M şi N. Locul geometric al intersecţiei dreptelor AN, BM este o conică (C) circumscrisă triunghiului OAB; tangentele la conică în A şi B sunt dreptele PA, PB.

Dacă P este situat pe iperbola $4xy = ab$, conica (C) este o parabolă.

Dacă A şi B tind către infinit pe axele Ox, Oy, conica (C) devine o iperbolă echilateră.

N. N MIHAILEANU

2367. — Să se stabilească relaţia

$$\sum \frac{\sin^2(a+b) + \sin^2(a-b)}{\cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos^2 a \cos^2 b} = 6,$$

ori care ar fi arcele a, b, c.

ILIE CONSTANTINESCU

2368. — Patru nave pleacă în acelaşi timp din acelaş punct A în direcţiile NE, E, SE, S. Vitezele navelor sunt respectiv v_1, v_2, v_3, v_4. Dacă navele sunt tot timpul pe aceiaşi linie, să se demonstreze relaţia

$$v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_4 = v_1v_4.$$

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Beşckea Radu (2317, 2326, 2332, 2333, 2338, 2342, 2348, 2349, 2352); *Birănaş Ioan* (P; 2134, 2166, 2182, 2183, 2299, 2300, 2302, 2305, 2310, 2311, 2312, 2316, 2318, 2323, 2331, 2332, 2333, 2338); *Bogza Mihai* (2288, 2298, 2332, 2335); *Braşoveanu Gh.* (P; 2204, 2261, 2265, 2313); *Chesaru Cristea* (2118, 2224, 2262, 2331, 2342); *Constantinescu Ilie* (N; P; 2039, 2049, 2056, 2103, 2189, 2202, 2221, 2262, 2276, 2277, 2325, 2326, 2327, 2330, 2331, 2332, 2333, 2335, 2338, 2339, 2342); *Caţiu Gh.* (2290, 2305, 2323, 2331, 2332, 2339); *Diea Rodica* (2334, 2338, 2339); *Dobrotescu Gh.* (2277, 2301, 2335, 2352), *Grumăzescu Mircea* (P); *Macovei Eugen* (2338, 2339); *Man Octavian* (2338); *Meteş Mircea* (2338, 2339); *Nedelcu Ulpius* (2310, 2331, 2333, 2338, 2339, 2342); *Petrovici Adalbert* (2265, 2290, 2303, 2335); *Popa Vasile* (2271, 2293, 2305, 2310, 2314, 2316, 2350); *Stroescu Florea* (2314, 2335, 2338, 2342); *Tincu C-tin* (2135, 2273, 2286, 2339, 2342, 2352); *Zubac Vladimir* (P; 2323, 2325, 2339).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 100 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din ani II—XXIV, cu preţul de lei 1000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXV NOEMVRIE 1945 No. 9.

„ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **C. V. COSTACHESCU:** ASUPRA UNEI PROBLEME DE NAVIGATIE.
2. NOTE MATEMATICE 20, 21, 22
3. BIBLIOGRAFIE.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. PROBLEME REZOLVATE: 550, 1536, 2092, 2252, 2257, 2298, 2304, 2310.
6. PROBLEME PROPUSE 2369 - 2376.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946) este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

Anunţăm cu plăcere că începând de la 15 Noemvrie 1945, mai face parte dintre membrii *„Revistei Matematice din Timişoara"* şi Dl. Ing. *Stelian Cetăţeanu*, care a fost un harnic şi apreciat corespondent.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 3000 lei fiecare.

ANUL XXV — NO. 9. TIMISOARA, NOEMVRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE NAVIGAȚIE

DE

Locot. C-dor C. V. COSTĂCHESCU.

O metodă pentru stabilirea punctului navei pe mare, cu obiecte la coastă în vedere, este relevarea (vizarea) a trei obiecte însemnate pe hartă.

Voiu trata pe scurt în ce constă această metodă.

1. Fie A un obiect pe mal și o navă care se află în N. Unghiul format între direcția Nord adevărat-Sud adevărat (Na-Sa) și direcția la obiect, contat în sens retro, poartă denumirea de relevment adevărat (Ra).

Direcția Na-Sa nu corespunde cu direcția Nord magnetic-Sud magnetic (Nm-Sm); unghiul format între cele două direcții — declinația (d) — este + când Nm de află la dreapta față de de Na, — în caz contrar. Valoarea declinației este dată în hărți

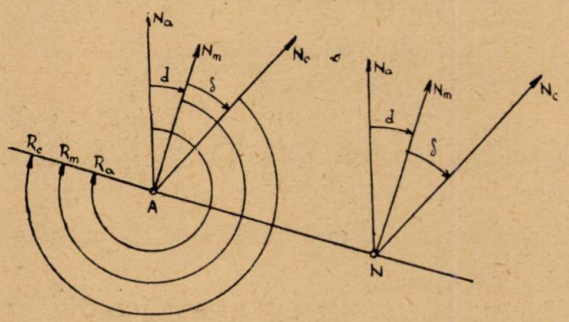


Fig. 1.

le de Navigație. Dacă nu ar exista magnetismul navei [1]), acul busolei s'ar orienta după direcția Nm-Sm. Acul busolei la o navă, se orientează după direcția Nord compas-Sud compas (Nc-Sc).

Unghiul format între direcțiile (Nm-Sm — Nc-Sc) poartă denumirea de deviație (δ) și este funcție de drumul în care se află nava; δ este + când Nc se află la dreapta față de Nm și — în caz contrar.

Din figura (1) se observă:

$$Ra = (Rc + \delta) + d = Rm + d,$$

Rc = relevment compas, Rm = relevment magnetic.

Rc se citește la busolă relevând obiectul. Dreapta A N este locul geometric al poziției navei. Dacă δ nu este bine cunoscută (a variat din diferite cauze), atunci Ra, care se tratează pe hartă va fi eronat.

2. Considerăm trei obiecte la uscat A, B, C și o navă în N. Se relevează cele trei obiecte și se obțin trei valori R_c^a, R_c^b, R_c^c. Acestea corectându-se cu $d + \delta$, dau relevmentele adevărate, care se tratează pe hartă, respectiv din A, B, C.

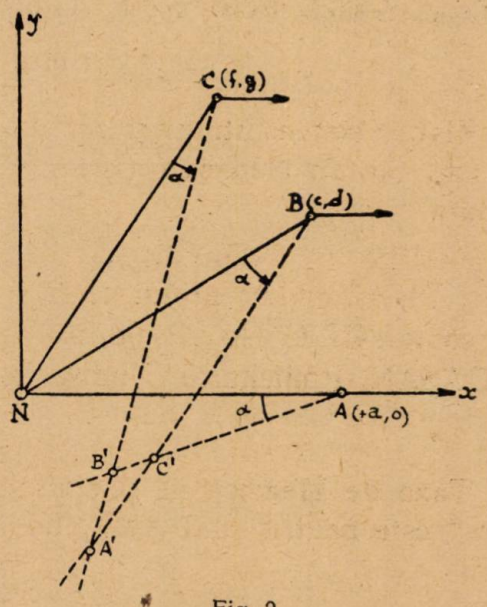


Fig. 2.

Dacă relevmentele au fost bine luate și $d + \delta$ exactă, cele trei relevmente adevărate, ce se vor trasa pe hartă, se vor întâlni într'un punct, care va fi poziția navei.

Dacă δ este eronată, cele trei relevmente ade-

[1]) A fost studiat în special de matematicianul francez *Poisson*.

vărate vor fi eronate cu aceiaşi cantitate, iar figura rezultată va fi un triunghiu.

Manualele de Navigaţie prescriu că se consideră punct al navei, centrul de greutate al triunghiului obţinut din intersecţia celor trei relevmente, apropiindu-l eventual de un relevment, care ar merita mai multă încredere. (Un Rc poate avea şi alte erori, eroare de citire, eroare de excentricitatea alidadei, etc.)

3. Imi propun să găsesc locul geometric, al poziţiei navei când δ variază.

Pentru uşurinţa demonstraţiei, voiu considera nava stopată. Fie A, B, C cele trei obiecte la mal, N poziţia navei (fig. 2).

Relevmentele adevărate eronate cu aceiaşi cantitate $\alpha = \Delta\delta$ se intersectează formând triunghiul A′ B′ C′. Centrul de greutate G al acestui triunghiu, dă poziţia navei. Se cere locul geometric al punctului G, când α variază.

Considerăm axele de coordonate din figură. Coeficienţii unghiulari ai dreptelor C B′, A B′, B C′ sunt:

$$R_1 = \frac{g + f \operatorname{tg}\alpha}{f - g \operatorname{tg}\alpha}, \quad R_2 = \operatorname{tg}\alpha, \quad R_3 = \frac{d + c \operatorname{tg}\alpha}{c - d \operatorname{tg}\alpha},$$

Ecuaţiile dreptelor C B′, A B′, B C′ sunt:

$$y - g = R_1 (x - f), \qquad y = R_2 (x - a),$$
$$y - d = R_3 (x - c).$$

Coordonatele celor trei puncte A′, B′, C′ sunt:

$$x = \frac{R_3 c - R_1 f + g - d}{R_3 - R_1}, \qquad y = \frac{R_1 R_3 (c - f) + g R_3 - R_1 d}{R_3 - R_1},$$

$$x = \frac{R_1 f - R_2 a - g}{R_1 - R_2}, \qquad y = \frac{R_3 [R_1 (f - a) - g]}{R_1 - R_2},$$

$$x = \frac{R_2 a - R_3 c + d}{R_2 - R_3}, \qquad y = \frac{R_2 [R_3 (a - c) + d]}{R_2 - R_3}.$$

Înlocuind valorile lui R_1, R_2, R_3 obţinem:

(A′)
$$x = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha [-g(c^2 + d^2) + d(g^2 + f^2)] + \operatorname{tg}\alpha [f(c^2 + d^2) - c(f^2 + g^2)]}{(df - cg)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)},$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha [f(c^2 + d^2) - c(g^2 + f^2)] + \operatorname{tg}\alpha [g(c^2 + d^2) - d(g^2 + f^2)]}{(df - cg)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)},$$

(B′)
$$x = \frac{ag \operatorname{tg}^2\alpha - af \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha (g^2 + f^2)}{g(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}, \qquad y = \frac{\operatorname{tg}\alpha [\operatorname{tg}\alpha (g^2 + f^2) - a(g + f \operatorname{tg}\alpha)]}{g(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)},$$

(C′)
$$x = \frac{ad \operatorname{tg}^2\alpha - ac \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha (d^2 + c^2)}{d(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}, \qquad y = \frac{\operatorname{tg}\alpha [\operatorname{tg}\alpha (c^2 + d^2) - a(d + c \operatorname{tg}\alpha)]}{d(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

Notând $df - cg = m$, $g^2 + f^2 = l_1^2$, $c^2 + d^2 = l_2^2$, X, Y coordonatele centrului de greutate al triunghiului A′ B′ C′, avem:

$$\frac{3X(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha \left[-2a + \frac{g l_2^2 - d l_1^2}{m}\right] - a\left(\frac{f}{g} + \frac{c}{d}\right) + \frac{l_1^2}{g} + \frac{l_2^2}{d} + \frac{l_2^2 f - c l_1^2}{m},$$

$$\frac{3Y(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \left[-a\left(\frac{f}{g} + \frac{c}{d}\right) + \frac{l_1^2}{g} + \frac{l_2^2}{d} + \frac{l_2^2 f - c l_1^2}{m}\right] - 2a + \frac{g l_2^2 - d l_1^2}{m},$$

$$\frac{3X(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} = -B \operatorname{tg}\alpha + A, \qquad \frac{3Y(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} = A \operatorname{tg}\alpha + B,$$

unde am notat:

$$A = \frac{l_2^2 f - c l_1^2}{m} + \frac{l_1^2 - af}{g} + \frac{l_2^2 - ac}{d}, \qquad B = -2a + \frac{g l_2^2 - d l_1^2}{m},$$

Eliminând pe α, vom găsi locul geometric al centrului de greutate

$$3X = -B\sin^2\alpha + A\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$3Y = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{3(AY-BX)}{A^2+B^2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{3(BY+AX)^2}{(A^2+B^2)(AY-BX)},$$

adunând relaţiile de mai sus, obţinem ecuaţia:

$$x^2+y^2-\frac{A}{3}y+\frac{B}{3}X=0.$$

Este ecuaţia unui cerc ce trece prin origină, având centrul

$$x=\frac{1}{3}\left(a+\frac{dl_1^2-gl_2^2}{2m}\right),$$

$$y=\frac{1}{3}\left[\frac{l_2^2-ac}{2d}+\frac{l_1^2-af}{2g}+\frac{l_2^2f-cl_1^2}{2m}\right],$$

Aceste coordonate însă, sunt coordonatele centrului de greutate al triunghiului format din centrelele celor trei cercuri circumscrise triunghiurilor NAB, NAC, NBC.

4. Concluziuni (fig. 3).

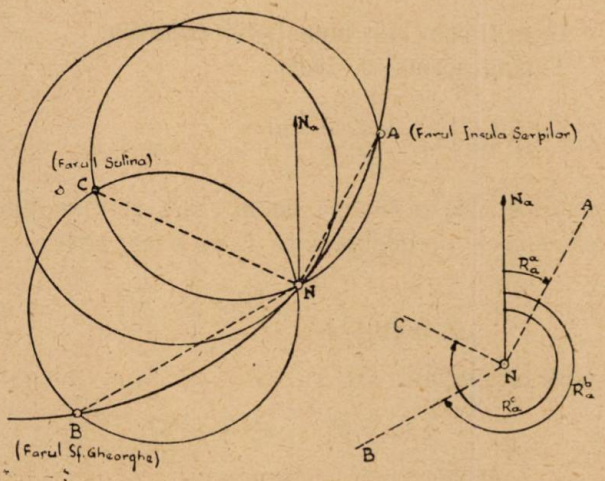


Fig. 3.

a) Locul geometric al poziţiei navei este un cerc, având centrul în centrul de greutate al triunghiului format de centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor NAB, NAC, NBC.

b) Acest cerc se poate construi determinând trei puncte depe el, prin variarea celor trei relevmente adevărate cu aceiaşi cantitate. Se poate trasa un diametru determinând centrul de greutate al triunghiului format de relevmentele date (G), variind apoi relevmentele date cu 90°, determinâm punctul G'; GG' este un diametru al cercului.

c) Prin N trec patru cercuri.

— Cercul determinat mai sus.

— Trei cercuri ce trec respectiv prin A, B; A, C; B, C şi capabile de unghiurile $R_a^b - R_a^a$; $R_a^c - R_a^a$; $R_a^c - R_a^b$ sau suplimentele acestor unghiuri (după cum reese din figură).

Deci N *se poate uşor determina, când cele trei relevmente sunt eronate cu aceiaşi cantitate.*

d) Se va evita în alegerea obiectelor ce se relevează, ca punctul navei să se afle pe acelaş cerc cu cele trei puncte, în acest caz N nu se poate determina.

NOTE MATEMATICE

20. — *Proprietăţi ale indicatorilor.*

1. *Cunoscând numărul numerelor prime cu* N, *din şirul numerelor consecutive dela* 1 *la* M, *unde* $M<N$ *vom cunoaşte şi numerele prime cu* N *din şirul numerelor consecutive dela* (N—M) *până la* N.

În adevăr, numărul numerelor prime cu N din şirul numerelor consecutive dela 1 la M este dat de expresiunea $I_M(N)$, iar acela dela (N—M) până la N de expresiunea:

$$I_{(N-M)\to N}(N) = I_N(N) - I_{N-M}(N)$$
$$= I_N(N) - [I_N(N) - I_M(N)]$$
$$= I_M(N). \qquad \text{C. c. e. d. d.}$$

2. *Cunoscând însăşi numerele prime cu* N *din şirul numerelor consecutive dela* 1 *la* M *unde* $M<N$, *le vom cunoaşte şi pe acelea dela* (N—M) *până la* N.

Fie $p_1, p_2, \ldots, p_m$ numerele prime cu N şi mai mici ca M şi $p_{n-m+1}, p_{n-m+2}, \ldots, p_n$ numerele prime cu N din şirul dela (N — M) la N, atunci avem:

$$p_1 + p_{n-m+1} = p_2 + p_{n-m+2} = \cdots = N.$$

C. c. e. d. d.

COMANDOR I LINTES

---

21. — *Câteva locuri geometrice.*

Fie D *o dreaptă arbitrară în planul triunghiului* ABC *şi* M *mobil pe* D. BM *taie pe* AC *în* N *şi* CM *pe* AB *în* P. NP *înfăşoară o conică* (C) *înscrisă în triunghiul* ABC.

În adevăr fie N arbitrar, pe AC; BN taie pe D în M şi CM pe AB în P; construcţia duce în mod unic dela N de pe AC la P de pe AB şi invers; N *şi* P *descriu diviziuni omografice pe* AB, AC, deci NP înfăşoară o conică, tangentă laturilor AB, AC. Când $M \equiv (D, BC)$, $NP \equiv BC$, deci conica este tangentă şi laturii BC. Punctul de tangenţă al laturii AB cu conica este omologul punctului $N \equiv A$, deci este intersecţia dreptei D cu AB. Deci AB, AC *ating conica în punctele în care ele taie dreapta* D.

Conica devine o parabolă când este tangentă dreptei dela infinit, deci când N, P sunt la infinit pe AC, AB. Atunci M devine al patrulea vârf al paralelogramului ABCA′. Deci *când* D *trece prin* A′, *conica* (C) *este o parabolă.*

Dacă dreapta D *trece prin* A, N şi P se confundă pentru $N \equiv A$; atunci NP *trece printr'un punct fix situat pe* BC — care este o rază particulară NP.

Dacă D este dreapta dela infinit, punctele de tangenţă ale conicei cu AB, AC sunt la infinit, deci ele sunt asimptote, iar A este centrul conicei; deci:

Două drepte paralele variabile duse prin B, C *taie pe* AC, AB *în* N, P *înfăşoară o iperbolă* (H) *de asimptote* AB, AC, *tangentă laturi* BC.

Făcând o transformare duală a problemei iniţiale, ajungem la enunţul:

O *fiind un punct în planul triunghiului* ABC *şi* Δ *o dreaptă variabilă dusă prin* O, *care taie pe* AC *în* N *şi pe* AB *în* P, *intersecţia* BN, CP *descrie o conică* (C′) *circumscrisă triunghiului* ABC. *Tangentele în* B, C *sunt* BO, CO. *Dacă* O *este situat pe* BC, *conica se reduce la o dreaptă ce trece prin* A.

Punctele dela infinit ale curbei sunt date de dreptele paralele BN, CP astfel ca NP să treacă prin O; dar NP înfăşoară, când direcţia paralelelor variază, iperbola (H) găsită mai sus. Asimptotele curbei sunt tangentele din O la iperbola (H); *deci când* O *este situat pe* (H), *conica* (C′) *este o parabolă.* Când O este în concavitatea iperbolei, conica (C′) este o elipsă şi este o iperbolă când O este în convexitatea curbei (H).

N. N MIHAILEANU

---

22. — *Asupra unor limite.*

Într'o notă din R. M. T. (XXV, 7, p. 80), D-l *Cezar Ivănescu* dă o soluţie interesantă problemei 37, Cap. XV, din *Culegere de Probleme de Algebră*, partea II-a, de *A. G. Ioachimescu.*

Pe aceeaşi cale, sau ca în *Culegere*, se poate arăta că avem, mai general:

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{r_0+\sum_{i=1}^{p} r_i a_i^{\frac{1}{m}}}{r_0+\sum_{i=1}^{p} r_i}\right]^m = \sqrt[1+\sum_1^p r_i]{a_1^{r_1} a_2^{r_2}\ldots a_p^{r_p}}.$$

Interesantă mi se pare şi problema determinării limitei expresiei:

$$E=\left[\frac{r_0+\sum_{i=1}^{p} r_i m^i a_i^{m-i}}{r_0+\sum_{i=1}^{p} r_i m^i}\right]^{r_0+\sum_{i=1}^{p} r_i m^i}.$$

Urmez calea din nota D-lui *Ivănescu.*

Ţinând seamă că avem:

$$a_i^{\frac{1}{m^i}} = 1+\frac{L\,a_i}{m^i}+\frac{\alpha_i}{m^{2i}}, \qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

unde α_i este o funcţie de m, care rămâne finită când $m\to\infty$, deducem că E se poate scrie:

$$E=(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\left(r_0+\sum_1^p r_i m^i\right)},$$

unde am notat:

$$\lambda=\frac{L\left(a_1^{r_1}.a_2^{r_2}\ldots a_p^{r_p}\right)+\sum_1^p \frac{r_i\alpha_i}{m^i}}{r_0+\sum_1^p r_i m^i}.$$

Observăm că, dacă

$$m\to\infty,\quad \lambda\to 0,\quad (1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}\to e,$$

iar

$$\lambda\left(r_0+\sum_1^p r_i m^i\right)=L\left(a_1^{r_1}.a_2^{r_2}\ldots a_p^{r_p}\right)+\sum_1^p\frac{r_i\alpha_i}{m^i}$$

tinde către

$$L\left(a_1^{r_1}.\, a_2^{r_2}\ldots a_p^{r_p}\right).$$

Urmează:

$$\lim_{m\to\infty} E = e^{a_1^{r_1}.\, a_2^{r_2}\ldots a_p^{r_p}} = a_1^{r_1}.\, a_2^{r_2}\ldots a_p^{r_p}.$$

În mod asemănător avem, mai general:

$$\lim_{m\to 0}\left[\frac{r_0+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} r_{ij}\, m^i\, a_{ij}^{m-i}}{r_0+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} r_{ij}\, m^i}\right]^{r_0+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} r_{ij} m^i} = \prod_{i,j=1}^{p} a_{ij}^{r_{ij}}$$

ANDREI DOBRESCU

EXAMENUL DE BACALAUREAT DIN TIMIŞOARA

SESIUNEA OCTOMVRIE 1945.

La Comisia I-a s'au dat la matematici următoarele 3 chestiuni, dintre care una obligatorie.

I.

În planul a două axe rectangulare se consideră punctele

$$A(0,2),\quad B(-2,0),\quad C(4,0).$$

1° Să se găsească ecuaţiile dreptelor ce conţin înălţimele triunghiului ABC.

2° Să se determine centrul O şi raza cercului circumscris triunghiului ABC, scriindu-se apoi şi ecuaţia acestui cerc.

3° Să se calculeze aria triunghiului ABC.

II.

1° Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+y=6 \\ (x-y)^2(x+y)=3. \end{cases}$$

2° Privind x, y drept coordonate ale unui punct din planul a două axe rectangulare, soluţiile sistemului ne dau respectiv coordonatele a două puncte A şi B.

Se cere ecuaţia cercului ce trece prin origină şi prin punctele A şi B.

3° Să se calculeze distanţa originei la dreapta AB.

III.

Se consideră în planul axelor rectangulare xOy, punctele

$$A(1,2),\quad B(6,2),\quad C(5,4),\quad D(2,4).$$

1° Să se arate pe cale geometrică şi analitică că, patrulaterul ABCD este un trapez isoscel.

2° Să se afle centrul şi raza cercului circumscris acestui trapez, găsindu-se şi ecuaţia acestui cerc.

3° Să se afle coordonatele punctului M de intersecţie a diagonalelor trapezului ABCD, precum şi aria triunghiului AMB.

La Comisia a 2-a s'au dat următoarele 3 chestiuni, dintre care una obligatorie.

I.

Fiind dată ecuaţia

$$x^4-x^3+\alpha x^2+x+6=0.$$

Se cere:

1. Să se determine α şi să se rezolve ecuaţia ştiind că produsul a două rădăcini este 2.

2. Luând rădăcinile găsite, în ordine crescătoare, în planul a două axe de coordonate rectangulare, prima ca abscisa, a doua ca ordonata unui punct A, a treia ca abcisa şi a patra ca ordonata unui punct B, să se scrie ecuaţia cercului ce trece prin cele două puncte şi originea axelor de coordonate.

3. Din punctul unde cercul intersectează axa Ox se duce o perpendiculară la o dreaptă variabilă ce trece prin originea axelor de coordonate, să se calculeze locul geometric al piciorului perpendicularei.

4. Să se spună caracteristicele locului geometric.

II.

In planul a două axe de coordonate rectangulare Ox, Oy, se dau dreptele:

$$D_1 \equiv x-2y+a=0 : D_2 \equiv y-2x-a=0.$$

Se cere:

1. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin intersecţia celor două drepte şi face un unghiu de 45° cu axa Ox. Să se verifice condiţia de concurenţă a celor trei drepte.

2. Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului format de dreapta D_1, dreapta găsită la punctul 1° şi axa Ox.

3 Considerând a ca parametru, să se calculeze locul geometric al centrului cercului.

4. Aria triunghiului căruia i-s'a circumscris cercul.

III.

Fiind dată funcţia:

$$y=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+4x+8.$$

Se cere:

1. Să se determine a,b,c ştiind că funcţia admite rădăcina triplă $x=2$.

2 Înlocuind valorile găsite în funcţia dată, să se calculeze toate rădăcinile funcţiei.

3. Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.

4. Să se scrie ecuaţia tangentei la curbă în punctul de abscisă $x=1$.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, Nr. 1, Septemvrie 1945 (Nr. Festiv).

Lista membrilor. 50 de ani împliniţi, de *G-l Gh. Buicliu* Divizibilitatea numerelor şi expresiunilor numerice, de *G-l Gr. Zapan.* Asupra unor congruenţe, de *I. V. Mătieş.* Triunghiul cu două bisectoare egale, de *I. Ionescu.* Egalitatea a două poligoane convexe, de *Miron Nicolescu.* Câteva

proprietăți ale cercurilor adjuncte, de *Emil Morțun*. Triunghiuri asemenea și omologice, de *Gh. D. Simionescu*. Despre triunghiurile podare asemenea cu triunghiul dat, de *Andrei Dobrescu*. O metodă simplă pentru a stabili relații remarcabile într'un triunghiu, de *V. Alaci*. Relații metrice între laturile unui poligon regulat, de Ing. *C. Mihu*. O relațiune metrică remarcabilă, de *Șerban Gheorghiu*. Asupra sferelor tangente la patru sfere date, de Ing *Ion C. Vasiliu*. Triunghiuri aritmetice în scară și șiruri recurente, de *Nicolae Ciorănescu*. Asupra unor inegalități, de *Tiberiu Popoviciu*. Asupra unor diferențe, de *C. Ionescu Bujor*. Aplicațiuni ale determinanților funcționali, de *D. V. Ionescu*. Transformarea circulară caracterizată printr'o ecuație funcțională, de *Th. Angheluță*. O problemă de la începuturile „*Gazetei Matematice*", de *G-l Gh. Buicliu*. Asupra unei clase de curbe care generalizează conicele, de *N. Abramescu*. In legătură cu centrele de curbură ale conicelor, de Lt. Col. *Mihail I. Focșeneanu*. Varietăți osculatoare la o curbă normală parabolică, de *N. N. Mihăileanu*. Teorema ortopolului ca o consecință a unei figuri spațiale, de *M. Nicolau*. O problemă de Geometrie Descriptivă, de *Adrian Gheorghiu*. Problema fundamentală a Geometriei cotate, de *Ioan I. Chițulescu*. Asupra axionei lui *Pasch*, de *E. Vișa*. Studiul trecerei din stare de repaos în stare de mișcare a unui cilindru rezemat cu frecare pe un plan înclinat, de *Gabriela Țițeica*. Generalizarea formulei lui *Binet*, de *Alexandru Stoenescu*. Notă despre o formulă de deplasare a liniilor spectrale în Mecanica Newtoniană, de *T. Vescan*. Matematica și impozitele, de *Alexandru Al. Roșu*. Începuturile publicistice ale lui *Gh. Țițeica*, de *Petre Sergescu*. Cea dintâi colaborare străină la „*Gazeta Matematică*", de *D. Barbilian*. *Ioan Bozoceanu* (1846 – 1897), de *Victor Marian*. Premiile, bursele și publicațiile Societății „Gazeta Matematică", de *Al. Al. Roșu* și Ing *D. A. Stan*. Concursul „Gazetei Matematice" din 1946. Raport pentru acordarea premiului „General *Scarlat Panaitescu*", de Ing. *Al. Bunescu*, Lt. Col. *Ed. Dragomirescu-Buzne*, Lt. C-dor Ing. *Aurelian Stan*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Gazeta Matematică*, Anul LI, Nr. 2, Octomvrie 1945. Programul serbării semicentenarului revistei „Gazeta Matematică", de *Serban Gheorghiu*, Prof. *P. Sergescu* și Ing. *Al. D. Bunescu*. Triunghiul cu două bisectoare egale, (urmare), de *I. Ionescu*. O problemă de structură, de *Dan Barbilian*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

3. *Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timișoara, Tome 12, Fasc. 1—2.*

Politecnica din Timișoara, 25 ani de existență, de *V. Vâlcovici*. Une classe remarquable d'équations algébriques, par *V. Alaci*. Le développement d'une fonction analitique d'après les fonctions fondamentales d'un noyau, par *Th. Anghelutza*. Sur les valeurs moyennes des fonctions, par *Michel Ghermanescu*. Sur le calcul d'un déterminant, par *D. V. Ionescu*. Sur les quartiques à point triple à tangentes distinctes et sur les courbes planes en général, par *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur les points multiples de la ligne parabolique d'une surface, par *E. Arghiriade*. Asupra curbelor *Țițeica* sferice, de *Alexandru V. Niculescu*. Longueur équivalente de fer des transformateurs, par *Remus Răduleț*. Abschirmung einloser hochfrequenzspulen, von Dr. Ing. *Remus Răduleț*. Hidrogenarea cărbunilor de „Doman" din Banat, de Dr Ing. *C. Cândea* și Ing. *Filofteia Dobrescu*. Cantitățile relative ale fazelor în diagrama aliajului Fier-Carbon, de *C. Bakonyi*. Etalonarea unui rotor hidrometric prin metoda comparației, de Ing. *V. Gheorghiu*. Majorarea extracției prin vase Skip, de Ing. *Vasile Bumbu* Navigația în sectorul Porților de Fer și a Cataractelor, de Ing. *Gabriel Dimitriu*. Comptes rendus des séances de la Societé Scientifique de L'École Polytechnique de Timișoara.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 550. — *În triunghiul isoscel* B A C (A B = A C), A′, B′, C′ *sunt picioarele înălțimelor* A A′, B B′, C C′; A′ E *este bisectoarea unghiului* A A′ C′ *și* A′ F *a unghiului* A A′ B′.

În ce condițiuni pentru triunghiul B A C*:*

1°. $\sphericalangle$ E A′ F = $\sphericalangle$ B A C.

2°. *Triunghiul* B E A′ *sau* A′ F C *e isoscel.*

3°. *Patrulaterul* A E A′ F *e romb.*

4°. *Aria rombului* A E A′ F *este egală cu suma ariilor triunghiurilor* B E A′ *și* A′ F C.

5°. *Triunghiul* E A′ F *este echilateral.*

6°. *Unghiul* B′ A′ C′ *e drept.*

ION PROTOPOPESCU

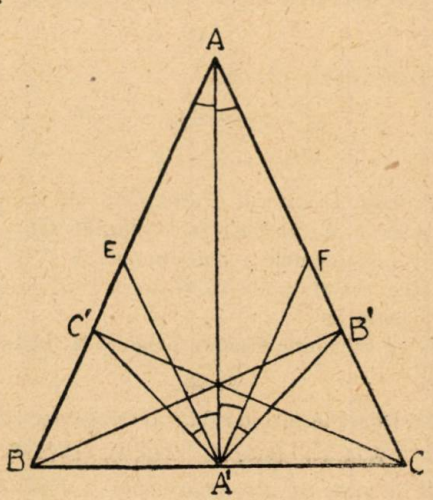
Soluție. 1°. Unghiul B′ A′ C′ fiind unghiului ortic A′ B′ C′, avem

$$\sphericalangle B' A' C' = \pi - 2A,$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \sphericalangle E A' F = \frac{\sphericalangle B' A' C'}{2} = \frac{\pi - 2A}{2} = A,$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \pi - 2A = 2A \quad \text{și} \quad A = 45^\circ.$$

Prin urmare *într'un triunghiu oare-care, deci și isoscel, unghiul* E A′ F *este egal cu unghiul* A, *dacă* A = 45°.



Reciproc, dacă A = 45°, avem

$$\sphericalangle B A' C' = \pi - 2A = 90^\circ \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \frac{\sphericalangle BA'C'}{2} = 45^\circ = A.$$

2°. În triunghiul isoscel A B C, avem

$$B = \frac{\pi - A}{2},$$

$$\sphericalangle EA'B = \sphericalangle C'A'B + \sphericalangle EA'C' =$$

$$A + \frac{\pi - 2A}{4} = \frac{\pi + 2A}{4},$$

$$\sphericalangle BEA' = \sphericalangle EAA' + \sphericalangle EA'A =$$

$$\frac{A}{2} + \frac{\pi - 2A}{4} = \frac{\pi}{4} = 45^0.$$

Triunghiul BEA' ar putea fi isoscel în următoarele 3 feluri

a) $\sphericalangle B = \sphericalangle EA'B \overset{*}{*}\overset{*}{*} \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi + 2A}{4} \overset{*}{*}\overset{*}{*} A = 45^0,$

b) $\sphericalangle B = \sphericalangle BEA' \overset{*}{*}\overset{*}{*} \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi}{4} \overset{*}{*}\overset{*}{*} A = \pi,$

ceia ce nu are senz

c) $\sphericalangle EA'B = \sphericalangle BEA' \overset{*}{*}\overset{*}{*} \frac{\pi + 2A}{4} = \frac{\pi}{4} \overset{*}{*}\overset{*}{*} A = 0,$

ceia ce de asemeni nu are sens. Deci triughiul BEA' este isoscel numai dacă $A = 45^0$ şi în acest caz $BE = EA'$.

Reciproca este de asemeni adevărată şi se demonstrează ca la 1°.

3°. Ca patrulaterul $EA'F'A$ să fie romb trebue mai întâi ca

$$\sphericalangle A = \sphericalangle EA'F$$

şi aceasta are loc când $A = 45^0$ după cum s-a văzut la 1°. Cum în orice triunghiu înălţimile sunt bisectoarele triunghiului ortic, rezultă din construcţia din enunţ că

$\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle AA'C'$ şi deci $\sphericalangle AA'F = \sphericalangle AA'E = \frac{A}{2}$.

Adică, dacă $A = 45^0$ figura $AEA'F$ este romb şi reciproc.

4°. Figura $AEA'F$ fiind romb, triunghiurile AEF şi $A'EF$ sunt evident egale. Apoi de oarece $EA' \parallel AC$ rezultă

$$\sphericalangle B = \sphericalangle EA'B = C \overset{*}{*}\overset{*}{*} BE = EA' = A'F,$$

iar $EF = BA'$ ca paralele între paralele. Deci dacă $A = 45^0$, în triunghiul isoscel ABC, atunci triunghiurile AEF, $EA'F$, $BA'E$, $CA'F$ sunt egale, de unde rezultă 4°.

5°. Pentru ca triunghiul $EA'F$ să fie echilateral, trebue ca mai întâi

$$\sphericalangle EA'F = \frac{\pi - 2A}{2} = \frac{\pi}{3} \overset{*}{*}\overset{*}{*} A = \frac{\pi}{6} = 30^0.$$

Se vede că proprietatea 5° nu este simultană cu celelalte proprietăţi.

6°. Ca unghiul $B'A'C'$ să fie drept trebue ca

$$\sphericalangle B'A'C' = \pi - 2A = \frac{\pi}{2} \overset{*}{*}\overset{*}{*} A = 45^0.$$

Deci într'un *triunghiu oarecare*, unghiul $B'A'C'$ este drept când $A = 45^0$ şi reciproc.

Problema a fost bine rezolvată de mulţi corespondenţi ai revistei. Dăm după cum urmează numele rezolvitorilor, indicând în paranteză după nume şcoala sau localitatea unde se aflau la trimiterea soluţiei, pentru acei ce au dat această indicaţie: *Atanasiu C-tin* (Bolgrad); *Antoniu V.* (Lic. Gh. Bariţiu, Cluj); *Bârş Petre* (Sibiel); *Beşchea Nicolae* (cl. VIII, Lic. Braşov); *Câlniceanu Gh.* (Lic. Timişoara); *Căzămir A. Iosif* (Lic. Arad); *Coşniţă Cezar* (Bârlad); *Costăchescu V. C.* (cl VI Lic. Militar, Iaşi); *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (cl. VI Lic. Fr. Buzeşti, Craiova); *Dimitriu Ath. Ioan* (Lic. Galaţi); *Dinu S. D-tru* (Şc. de conductori, Chişinău); *Drăgan G.* (absolvent, Braşov); *Dragnea Gh. Ovidiu* (Lic. Roman); *Dumitrescu I. Eugen* (Lic. Buzău); *Gheorghiu Th. Gh.* (cl VII, Lic. Galaţi); *Ghişoiu I. P.* (Lic. Sp. Haret, Bucureşti); *Iancu D.* (cl. VI, Lic Naţional, Iaşi); *Ionescu-Bujor Th. C.* (cl. VIII, Lic. Cantemir, Bucureşti); *Iovănescu Dan* (Lic. Carol I, Craiova); *Iovănescu D-tru* (Lic Fraţii Buzeşti, Craiova); *Iovănescu Felix* (Craiova); *Lepădatu I Miclea*; *Lupşan Nedelcu* (cl. V, Braşov); *Manolescu I. Nicolae* (Focşani); *Marinescu N. Nicolae* (Lic. Militar, Iaşi); *Mariş Marius* (Lic Arad); *Mihăileanu N. N.* (Constanţa); *Mocuţa Tr.* (Lic. Arad); *Panţu Z. Ioan* (Lic. Gh. Lazăr, Bucureşti); *Patron T N.* (Lic. Militar, Iaşi); *Popescu N. Corneliu* (cl. VII particulară, Craiova); *Roman I. Ioan* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti); *Râmniceanu I. Cristian* (Lic. Militar, Iaşi); *Savin C. Ioan* (Lic. Militar, Iaşi); *Stan I. Aurelian* (Lic. Militar, Iaşi); *Stan C.* (Roman); *Vasiliu Gh. Gh.*; *Vlădea Ioan* (Şc. Politehnică, Timişoara); *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (cl. VII, Lic. I. C. Brătianu, Piteşti).

Problema 1536. — *α, β, γ fiind laturile triunghiului care are drept vârfuri picioarele bisectoarelor interioare ale unui triunghiu* ABC, *avem relaţia*:

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 2rs\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right).$$

MARCEL F. AMARASTEANU

Soluţie. Notăm cu E primul membru şi ţinând seamă de relaţiile

$$\alpha = 2r\cos\frac{A}{2}, \quad \beta = 2r\cos\frac{B}{2}, \quad \gamma = 2r\cos\frac{C}{2},$$

(Compléments de Trigonométrie par F. G. M), putem scri

(1) $E=4r^2\left(a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$.

Dar avem cunoscute

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

şi altele analoage, apoi $rp=s$, astfel că (1) devine

$$E=4r^2\left[a\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+b\cdot\frac{p}{b}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}+\right.$$

$$\left.c\cdot\frac{p}{c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{a-b}}\right]=4rs\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right),$$

adică tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Andrievici N*, (Lic. Milit., N. Filipescu), *Diaconescu Ion* (Lic. T-Severin), *Stoenescu Mirel* (Lic. Milit, N. Filipescu) şi *Segal Zigu* (Lic. Vaslui).

Problema 2092. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)(z+1)=24\\(x^3+1)(y^3+1)(z^3+1)=504\\xyz(2-xyz)+\Sigma x^2y=24,\end{cases}$$

aflându-se numai rădăcinile întregi [1].

ADRIAN POPESCU

Soluţie. Împărţind ecuaţia 2-a prin prima, obţinem

$$(x^2-x+1)(y^2-y+1)(z^2-z+1)=21,$$

sau desvoltând, avem

(1) $$x^2y^2z^2+\Sigma x^2y^2+\Sigma x^2-\Sigma x+\Sigma xy-xyz-$$
$$xyz\Sigma xy+xyz\Sigma x-\Sigma x^2y=20.$$

De asemeni, prima şi ultima ecuaţie a sistemului se pot scri

(2) $$\Sigma x+\Sigma xy+xyz=23,$$

(3) $$2xyz-2x^2y^2z^2+\Sigma x^2y=24.$$

Acum, notăm

(2) $$\Sigma x=a,\quad \Sigma xy=b,\quad xyz=c$$

şi observăm că

$$\Sigma x^2y^2=(\Sigma xy)^2-2xyz\Sigma x=b^2-2ac,$$

$$\Sigma x^2=(\Sigma x)^2-2\Sigma xy=a^2-2b,$$

$$\Sigma x^2y=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=$$
$$xy(a-z)+yz(a-x)+zx(a-y)=a\Sigma xy-3xyz=ab-3c.$$

În virtutea acestor relaţii, ecuaţiile (1), (2) şi (3) ne dau

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2-a-b+2c-ab-ac-bc=20\\a+b+c=23\\ab-c^2-c=4,\end{cases}$$

sau

(3) $$\begin{cases}(a+b)^2-2ab+c^2-(a+b)+2c-ab-c(a+b)=20\\a+b=23-c\\ab=24+c+c^2.\end{cases}$$

Prima din aceste relaţii, în virtutea celorlalte două devine

$$(23-c)^2-2(24+c+c^2)+c^2-(23-c)+$$
$$2c-(24+c+c^2)-c(23-c)=20$$

şi dezvoltând găsim

$$69c=414,\quad \text{deci}\quad c=6.$$

Această valoare întrodusă în ultimele două ecuaţii din (3), ne dă

$$\begin{cases}a+b=17\\ab=66.\end{cases}$$

Rezultă că a, b sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 2-lea

$$t^2-17t+66=0,$$

de unde deducem

$$\begin{cases}a=6\\b=11\end{cases}\quad\text{sau}\quad\begin{cases}a=11.\\b=6.\end{cases}$$

Sistemul (2), echivalent cu cel din enunţ, devine

$$\Sigma x=6,\quad \Sigma xy=11,\quad xyz=6.$$

sau

$$\Sigma x=11,\quad \Sigma xy=6,\quad xyz=6.$$

Prin urmare x, y, z, sunt rădăcinele ecuaţiilor de gradul al 3-lea

$$u^3-6u+11u-6=0,$$
$$u^3-11u+6u-6=0,$$

Prima din aceste ecuaţii are rădăcinele $x=1$, $y=2$, $z=3$ şi acelea ce se obţin prin permutări circulare.

Ecuaţia a 2-a n'are rădăcini întregi.

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C.*, *Enăchescu Ion* (Lic.

[1]) Enunţ complectat.

Milit., Timişoara), *Gâţă Gheorghe* (Lic. Tg.-Jiu), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus) şi *Wegener Eugen* (Polit., Bucureşti),

---

Problema 2252. — *Să se determine a, b, c astfel ca derivata funcţiei*

$$y = \operatorname{arctg}(1+2x) + \log(1+2x+2x^2) + \frac{ax^4+bx+c}{2x^2+2x+1}$$

să se anuleze pentru $x=-1$, $x=0$ şi $x=1$.

Să se precizeze pentru fiecare din aceste valori dacă funcţia este maximă sau minimă. Să se arate că pentru valorile găsite pentru a, b, c derivata are şi două rădăcini imaginare. (Simbolul log, înseamnă logaritm neperian).

V. ALACI

Soluţie. Derivând funcţia dată avem succesiv

$$y' = \frac{2}{1+(1+2x)^2} + \frac{4x+2}{1+2x+2x^2} + \frac{(4ax^3+b)(2x^2+2x+1) - (4x+2)(ax^4+bx+c)}{(2x^2+2x+1)^2} =$$

$$\frac{1}{2x^2+2x+1} + \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} + \frac{4ax^5+6ax^4+4ax^3-2bx^2-4cx+b-2c}{(2x^2+2x+1)^2},$$

sau

$$y' = \frac{(4x+3)(2x^2+2x+1)+4ax^5+6ax^4+4ax^3-2bx^2-4cx+b-2c}{(2x^2+2x+1)^2} =$$

$$\frac{4ax^5+6ax^4+4(a+2)x^3-2(b-7)x^2-2(2c-5)x+b-2c+3}{(2x^2+2x+1)^2}.$$

Scriind acum condiţiile ca derivata să se anuleze pentru $x=0$, $x=1$, $x=-1$, găsim că a, b, c trebuie să satisfacă sistemul

$$(1) \quad \begin{cases} b-2c=-3 \\ 14a-b-6c=-35 \\ 2a+b-2c=-1. \end{cases}$$

Să rezolvim acest sistem. Pentru aceasta observăm că ecuaţia 3-a în virtutea primei ecuaţii, ne dă

$$a=1$$

şi deci primele două ecuaţii din (1) devin

$$\begin{cases} b-2c=-3 \\ b+6c=49. \end{cases}$$

De aci deducem cu uşurinţă

$$b=10, \quad c=\frac{13}{2}.$$

Astfel sistemul (1) admite soluţiile

$$a=1, \quad b=10, \quad c=\frac{13}{2}.$$

Înlocuind aceste valori în ultima expresie a derivatei, obţinem

$$(2) \quad y' = \frac{4x^5+6x^4+12x^3-6x^2-16x}{(2x^2+2x+1)^2}.$$

Cum am determinat pe a, b, c, astfel ca derivata să se anuleze pentru $x=0$, 1 şi -1, rezultă că numărătorul fracţiei din (2) admite factorii $x, x-1, x+1$, deci se divide prin

$$x(x-1)(x+1) = x(x^2-1)$$

şi efectuând această împărţire, găsim câtul

$$2(2x^2+3x+8).$$

Putem prin urmare scri

$$y' = \frac{2x(x-1)(x+1)(2x^2+3x+8)}{(2x^2+2x+1)^2}.$$

Anulând derivata, ceeace înseamnă că trebuie să anulăm numărătorul, găsim rădăcinele reale

$$x_1=-1, \quad x_2=0, \quad x_3=1,$$

precum şi rădăcinele imaginare

$$x_{4,5} = \frac{-3 \pm \sqrt{-55}}{4}.$$

Cum valorile care fac minimă sau maximă o funcţie sunt acelea care anulează derivata, în cazul minimului derivata trecând de la negativ la pozitiv, iar în cazul maximului derivata trecând de la pozitiv la negativ, urmează să întocmim tabloul de variaţie, care în cazul nostru este

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conform celor afirmate mai sus, rezultă că funcţia admite un minim pentru $x = -1$ şi $x = 1$ şi admite un maxim pentru $x = 0$.

Soluţii date de d-nele *Abramescu Victoria* (Cluj), *Denes Ritta Mariana* (Polit., Timişoara), de d-rele *Măran Ana* (Polit., Timişoara), *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii *Avram Christache* (Lic. Brăila), *Bagiu Ioniţă* (Polit., Timişoara), *Birănaş Ioan* (Arad), *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Gheţea Traian* (Lic. Făgăraş), *Giurconiu Mihail* (Polit, Timişoara). *Gottard Francisc* (Polit., Timişoara), *Kinschy Ion* (Polit, Timişoara), *London Emeric* (Polit., Timişoara), *Mazilu M.*, *Miclea Nicolae* (Polit, Timişoara), *Nedelcu Ulpius* (Lic. Milit., Timişoara), *Petrescu Viorel*, *Petrescu Adalbert* (Lic. Brad), *Popa Vasile* (Lic. Beiuş), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit. Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petru* (Polit, Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic, Loga Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş) şi *Vegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2257. — *Să se afle patratul de patru cifre $a\,b\,c\,d$ ştiind că $c\,d = x\,y + b$, unde $x\,y$ este rădăcina patrată a lui $a\,b\,c\,d$.*

LUCIAN MUNTEANU

Soluţie dată de d-nii: Cpt. G. P. Boerescu, Petre Ionescu (student), şi *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit, Timişoara).

Ţinând seamă că patratul cerut este de patru cifre şi că $c\,d = x\,y + 6$, rezultă că dintre terminaţiile de două cifre (C. de P. de *I. Ionescu*) nu putem lua decât,

$c\,d = 41,\ 44,\ 49,\ 56,\ 61,\ 64,\ 69,\ 76,\ 81,\ 84,\ 89,\ 96,$

de unde deducem, respectiv, pentru $x\,y$ valorile

$x\,y = 35,\ 38,\ 43,\ 50,\ 55,\ 58,\ 63,\ 70,\ 75,\ 78,\ 83,\ 90.$

Excluzând dintre valorile lui $x\,y$ pe cele mult. 5, căci se vede uşor că prin ridicare la patrat nu pot da numere cu terminaţiile corespunzătoare, obţinem numai următoarele 6 soluţii:

$$38^2 = 1444, \qquad 63^2 = 3969,$$
$$43^2 = 1849, \qquad 78^2 = 6084,$$
$$58^2 = 3364, \qquad 83^2 = 6889.$$

Alte soluţii mai lungi date de d-nii: *Barbu Ion*, *Birănaş Ioan* (Lic Arad), *Chiria C-tin*, *Creţa Gavril* (Polit., Timişoara), *Costea Florian* (Lic Beiuş), *Godea I.* (Polit, Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Grigore Gheorghe*, *Rogoz Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit. Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

Observare. N'au fost luate în consideraţie soluţiile formulate astfel: Căutând într'o tabelă de patrate perfecte, găsim următoarele soluţii . . .

Problema 2298. — *Să se găsească două numere prime consecutive, de două cifre, a căror sumă este patrat perfect.*

CH. GOLDIS

Soluţie. Numerele prime de două cifre sunt

(1) 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73. 79, 83, 87, 89, 97.

Suma a două numere consecutive din acest şir, evident că, este un număr par. Cum terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect, cu ultima cifră pară, sunt

(2) 00, 04, 16, 24, 36, 44, 56, 64, 76, 84 şi 96,

rezultă că numerele consecutive din şirul (1), a căror sumă câte două dau terminaţii de forma (2), sunt următoarele

(11, 13 ; (17, 19); (41, 43); (47, 53 ; (71, 73 ; (87, 89),

fiindcă

$$11 + 13 = 24, \qquad 47 + 53 = 100$$
$$17 + 19 = 36 \qquad 71 + 73 = 144$$
$$41 + 43 = 84 \qquad 87 + 89 = 176.$$

Dintre numerile din membrii ai 2-lea, patrate perfecte, sunt numai 36, 100, 144.

Soluţiile problemei sunt astfel

$36 = 17 + 19 = 6^2$, $100 = 47 + 53 = 10^2$, $144 = 71 + 73 = 12^2$.

Soluţii date de d-nii: *Barbu Ion*, *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Creţa Gavril* (Polit, Timişoara), *Gligor Ioan* (sudent, Timişoara), *Mazilu Marius*, *Goldiş Gh.* (Polit., Timişoara), *Miclea Nicolae* (Polit, Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit, Timişoara) şi *Vrănceanu Gh.* (Lic Milit, Timişoara).

Observare. Două soluţii n'au putut fi luate în consideraţie.

Problema 2304. *Intr'un triunghiu dreptunghiu* ABC, *în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţia*

$$\operatorname{tg} 4B = \frac{32\, s^2\, sp\,(45^0 - B)}{(a^4 - 32\, s^2)\, sp\, B}.$$

V ALACI

Soluţie. Avem relaţiile cunoscute

(1) $\operatorname{tg} 4B = \dfrac{2 \operatorname{tg} 2B}{1 - \operatorname{tg}^2 2B}$, (2) $\operatorname{tg} 2B = \dfrac{2 \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg}^2 B}$.

Cum $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$, relaţia (2) devine

(3) $\operatorname{tg} 2B = \frac{2bc}{c^2 - b^2} = \frac{4s}{c^2 - b^2}$, fiindcă $bc = 2s$.

În virtutea relaţiei (3), (1) devine

(4) $$\operatorname{tg} 4B = \frac{8s(c^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)^2 - 16s^2} = \frac{8s(c^2 - b^2)}{(c^2 + b^2)^2 - 4b^2c^2 - 4b^2c^2} = \frac{8s(c^2 - b^2)}{a^4 - 8b^2c^2}.$$

Însă din *„Trigonometria patratică“*, se cunosc într'un triunghiu dreptunghic, relaţiile

$$b = (b + c)\,sp\,B, \quad c - b = 2c\,sp(45^\circ - B),$$

rezultă de aci

$$(c - b)(c + b) = 2c\,sp(45^\circ - B)\cdot\frac{b}{sp\,B},$$

sau

$$c^2 - b^2 = \frac{2bc\,sp(45^\circ - B)}{sp\,B}.$$

În virtutea acestei relaţii, egalitatea (4) devine

$$\operatorname{tg} 4B = \frac{8s \cdot 2bc\,sp(45^\circ - B)}{(a^4 - 8b^2c^2)\,sp\,B}$$

şi cum $bc = 2s$, mai putem scri

$$\operatorname{tg} 4B = \frac{8s^2\,sp(45^\circ - B)}{(a^4 - 32s^2)\,sp\,B}.$$

Avem astfel stabilită relaţia din enunţ.

Soluţii bune date de d-nii: *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (bacalaureat, Timişoara) şi *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara).

Problema 2310. — *Să se calculeze derivatele funcţiilor*

$$y = \arccos\frac{b^2 + a^2 - 2x^2}{b^2 - a^2}, \quad z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}$$

şi să se explice rezultatul.

E. LONDON

Soluţie Calculând derivatele celor două funcţii date avem respectiv

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + a^2 - 2x^2}{b^2 - a^2}\right)^2}}\cdot\frac{-4x}{b^2 - a^2} = \frac{4x}{\sqrt{(b^2 - a^2)^2 - (b^2 + a^2 - 2x^2)^2}}.$$

Cum

$$(b^2 - a^2)^2 - (b^2 + a^2 - 2x^2)^2 = (b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - 2x^2)(b^2 - a^2 - b^2 - a^2 + 2x^2) = 4(b^2 - x^2)(x^2 - a^2),$$

rezultă

(1) $$y' = \frac{2x}{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}},$$

apoi

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}}\cdot\frac{\frac{2x}{b^2 - a^2}}{2\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}},$$

sau

(2) $$(2z)' = \frac{2x}{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}}.$$

Derivatele funcţiilor y şi $(2z)$ date din (1) (2) fiind egale, rezultă că funcţiile diferă printr'o constantă, adică

(3) $$y - 2z = C \qquad (C, \text{ constant}).$$

Rămâne acum să mai explicăm rezultatul din (3).

Pentru aceasta, trecând la funcţiile inverse celor date, avem

$$\cos y = \frac{b^2 - a^2 - 2x^2}{b^2 - a^2}, \qquad \sin^2 z = \frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2},$$

Dar,

$$\cos y = 1 - \frac{2(x^2 - a^2)}{b^2 - a^2} = 1 - 2\sin^2 z = \cos 2z.$$

De aci deducem

$$y - 2z = 2k\pi \qquad (2k\pi, \text{ constant}).$$

Avem astfel explicaţia relaţiei (3).

Soluţii date de d-nii: *Acel Ioan* (Lic. Piarist, Timişoara), *Beşchea Radu* (Brăila), *Birănaş Ioan* (Arad), *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Constantinescu Ilie*, (Lic. Brăila), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Goldis Gh.*, *Gottard Francisc* (Polit., Timişoara), *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraş), *Nedelcu Ulpius* (Timişoara), *Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Petõ Ştefan* (Lic. Piarist, Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Popa Vasile* (Lic. Beiuş), *Rohrlich Alfred* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara), *Stroescu Florea* (Lic. Caracal), *Tincu C-tin* (Timişoara), *Vlăduţ C-tin* (Polit., Timişoara), şi *Vrânceanu Gh.* (Lic. Milit., Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

2369. — Cu patru cifre 3 şi patru cifre 7, câte numere de opt cifre se pot forma? Câte dintre ele sunt divizibile prin 37 şi câte prin 73?

V. THÉBAULT

2370. — Se dă ecuaţia

$$f(x) = x^5 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x + \delta = 0.$$

Să se determine coeficienţii α, β, γ în funcţie de δ astfel ca ecuaţia în y ce se obţine făcând transformarea

$$y = \frac{x}{1+x}$$

să fie reciprocă.
Să se afle, în urmă, valoarea lui δ pentru care între rădăcinele ecuaţiei $f'(x) = 0$ să existe relaţia

$$x_1 + x_2 = 3(x_3 + x_4).$$

CPT. MIRCEA GRUMAZESCU

2371. — În triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90^0$) fie O mijlocul lui BC, M mijlocul lui AC, D piciorul perpendicularei din A pe BC, N piciorul perpendicularei din D pe AB.

1° Se cere să se verifice relaţiile:

$$2(\overline{AO}^2 + \overline{OC}^2) = \overline{BC}^2;$$

$$\overline{AD}^4 - \overline{ND}^4 = \overline{BN}(\overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AN}^2 \cdot \overline{BN});$$

$$\overline{AD}^4 - \overline{ND}^4 = \overline{AN}^3(\overline{AB} + \overline{BN}).$$

2° Dându-se:

$$\overline{AB} = a\sqrt{2}, \quad \overline{BN} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

se cere să se afle suprafaţa figurii la care se reduce poligonul ANDOM. Să se verifice că suprafaţa obţinută este jumătatea suprafeţei triunghiului ABC dat.

AL. ŢIGANOIU

2372. — Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând în plan baza BC, ştiind că paralelele din un punct M la AB şi AC determină pe BC un segment de lungime dată şi cunoscând distanţa de la A la un alt punct fix N.

G-L GH. BUICLIU

2373. — Să se arate că produsul rapoartelor, în care o dreaptă, ce trece prin punctul de întâlnire al diagonalelor, împarte laturile neparalele ale unui trapez, este egal cu patratul raportului bazelor.

MARIA NEUMANN

2374. — Să se verifice identităţile:

$$\cos nx = \frac{1}{\cos^n x}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \operatorname{tg}^{2k} nx\right],$$

$$\sin nx = \frac{\operatorname{tg} nx}{\cos^n x}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \operatorname{tg}^{2k} nx\right],$$

$$|x| < 1, \quad \frac{-\pi}{4} < n \leq \frac{\pi}{4}.$$

FLORIAN GOGA

2375. — Să se arate că într'un triunghiu orecare ABC, avem relaţiile:

$$\frac{b\cos\frac{C}{2} + c\cos\frac{B}{2} - p}{b\cos\frac{C}{2} + c\cos\frac{B}{2} + p} = \operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4};$$

$$\frac{b^2\cos^2\frac{C}{2} - c^2\cos^2\frac{B}{2}}{b\cos^2\frac{C}{2} - c\cos^2\frac{B}{2}} = p,$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

V. ALACI

2376. — Fie laturile a, b, c ale unui triunghiu dreptunghiu. Se construesc două triunghiuri, care au fiecare câte un unghiu de 135°, iar laturile adiacente sunt respectiv, b, $a+c$; c, $a+b$.

Dacă ω şi ω_1 sunt unghiurile ce se opun laturilor b şi c, să se demonstreze relaţia:

$$cp\,\omega + cp\,\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\,ap}{(2p-b)(2p-c)}.$$

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

CANDIDAŢII ADMIŞI ÎN POLITEHNICĂ (Noemvrie 1945).

1. *Tincu Constantin* (Lic. Loga, Timişoara).
2. *Dobrişan Alexandru* (Lic. Buzeşti, Craiova).
3. *Reiter Margareta* (Lic. Izrailit, Timişoara).
4. *Opreanu Marcel* (Lic. Brăila).
5. *Schiopu Ioan* (Lic. Arad).
6. *Polyac Ladislau* (Lic. Braşov).
7. *Birănaş Ioan* (Lic. Brad)
8. *Mitric Aurel* (Lic. T-Severin).
9. *Alexandrescu N. Vasile* (Lic. Brăila).
10. *Softa St. Gh.* (Lic. Loga, Timişoara).
11. *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timişoara).
12. *Moraru Mircea* (Col. Carol I, Craiova).
13. *Constantinescn N. Ilie* (Lic Brăila).
14. *Crâsnic Titus* (Lic. Arad).
15. *Erdelyi Ioan* (Lic. Izrailit, Timişoara).
16. *Popa Vasile* (Lic. Beiuş).
17. *Abrudan Ioan* (Lic. Loga, Timişoara)
18. *Macavei A Eugen* (Lic. Câmpina).
19. *Stern Tiberiu* (Lic. Izrailit, Timişoara).
20. *Anastasescu Decebal* (Lic. Loga, Timişoara).
21. *Elias Corneliu* (Lic. T-Severin).
22. *Moţiu Petre* (Lic Arad).
23. *Sasu Ioan* (Lic Beiuş).
24. *Seragan Mihai* (Lic. Loga, Timişoara).
25. *Mladin C. Mircea* (Lic. Turda).
26. *Gotthard A. Francisc* (Lic. Piarist, Timişoara).
27. *Popescu Gr. Dumitru* (Lic Loga, Timişoara).
28. *Rădoi A. Marin* (Lic Vlaicu, Bucureşti).
29. *Cârje Stare Victor* (Lic. Loga, Timişoara).
30. *Frenkel David* (Lic. Izrailit, Cluj).
31. *Goldiş I. Gheorghe* (Lic. Beiuş).
32. *Türkl Andrei* (Lic. Lugoj).
33. *Nad Duriş Ioan* (Lic. Arad).
34. *Avătavului Mihai* (Lic. Deva)
35. *Băcanu M. Mircea* (Coleg. Carol I, Craiova).
36. *Dumitrescu Traian* (Lic Slatina).
37. *Oţel Anatolie* (Lic. Orăştie).
38. *Sergiu Pali* (Lic. Chişinău).
39. *Oprea Vasile* (Lic. Blaj).
40. *Apetrei C. Constantin* (Lic P-Neamţ).
41. *Cornea Constantin* (Lic Făgăraş).
42. *Cucuian Gh.* (Examen de selecţionare).
43. *Gheorghiadis E. Mihail* (Lic. Brăila)
44. *Hulpoi Gh. Nicolae* (Lic. R-Sărat).
45. *Opriş Constantin* (Lic. Arad).
46. *Sârbu I. Iancu* (Lic Loga, Timişoara).
47. *Dimitriu I. Serban* (Lic. Craiova).
48. *Elmann Morel* (Lic. Cultura, Bucureşti).
49. *Senchea Septemiu* (Lic. Loga, Timişoara).
50. *Topârceanu I. Ilie* (Lic. Sibiu).
51. *Farcu Octavian* (Lic. Brad).
52. *Ghişe Gh. Ioan* (Lic. Orăştie),
53. *Grünberger Emeric* (Lic. Izrailit, Timişoara).
54. *Ionescu Gh. Mihalache* (Examen de selecţionare).
55. *Matei V Gh. Mihai* (Coleg. Carol I, Craiova).
56. *Moarcăş Ioan* (Lic. Loga, Timişoara).
57. *Coman Alexandru* (Lic. Sibiu).
58. *Meze Florian* (Lic, Beiuş).
59. *Parhoti Eugen* (Lic. Slatina).
60. *Popovici Constantin* (Lic. P-Neamţ).
61. *Scârcitu T. Teodor* (Lic. Brăila).
62. *Stanciu Olimpiu* (Lic. Loga, Timişoara).
63. *Bolcu Mircea* (Lic. Brad).
64. *Grosz Ioan* (Lic. Izrailit, Timişoara).
65. *Dumitrescu D. Nicolae* (Lic. R-Sărat).
66. *Iordăchescu I. Alexe* (Examen de selecţionare).
67. *Seiden Iosif* (Lic. Deva).
68. *Fitero I. Ioan* (Lic. Beiuş).
69. *Heinrich Alexandru* (Lic. Arad).
70. *Ionescu I. Florea.*
71. *Romanov Petru* (Lic. Loga, Timişoara).
72. *Suciu Iacob* (Lic. Turda).
73. *Ciocârlie Sabin* (Lic. Loga, Timişoara).
74. *Drâmboreanu Mitrofan* (Lic. Alba-Iulia).
75. *Groza Titu* (Lic. Deva).
76. *Pascu St. Ioan* (Lic. Lugoj).
77. *Radu M. Constantin* (Lic. Vlaicu, Bucureşti).
78. *Stănescu Aurelian* (Lic. Brăila).
79. *Stoiciu Boris* (Lic. Ismail).
80. *Stoenescu Aurel* (Lic. Arad).
81. *Berlovan Gheorghe* (Lic. Loga, Timişoara)
82. *Györi Ladislau* (Lic. Piarist, Timişoara).
83. *Morar Emil* (Lic. Alba-Iulia).
84. *Nicoară A. Laurenţiu* (Lic. Brad).
85. *Percea Dumitru* (Lic Iaşi).
86. *Topârceanu I. Ioan* (Lic. Sibiu).
87. *Feldman Ştefan* (Lic. Oradea).
88. *Ioachimescu Radu* (Lic. Eminescu, Bucureşti).
89. *Ianţa Vasile* (Lic. T-Măgurele).
90. *Juncu I. Costică* (Lic. Brăila).
91. *Lindeman Curt* (Lic. P Neamţ).
92. *Sefer Gheorghe* (Lic. Câmpina).
93. *Somlo Emeric* (Lic. Arad).
94. *Stoica C. Gheorghe* (Coleg. Carol I, Craiova).
95. *Toma Livius* (Coleg. Carol I, Craiova).
96. *Baştea Mihai* (Lic. Alba- Iulia).
97. *Berkovits Stefan* (Lic. Arad).
98. *Coman I. Ilie* (Lic. Caransebeş).
99. *Cristea Mircea* (Lic. Braşov).
100. *Dorobanţiu A. Alexandru* (Lic. Sibiu).
101. *Ene D. Vasile* (Lic. Bacău).
102. *Hidoş Cornel* (Lic Sibiu).
103. *Ionaşcu Gruia* (Coleg. Carol I, Craiova),
104. *Klein Ervin* (Lic. Izrailit, Timişoara).
105. *Matei Aurel* (Lic. Loga, Timişoara).
106. *Pastea Liviu* (Lic. Sibiu).
107. *Petrovici Adalbert* (Lic. Brad).
108. *Hoffmann Victor* (Lic. Arad).
109. *Moisescu Pavel* (Lic. Lugoj).
110. *Zamfir N. Iulian* (Lic. Constanţa).
111. *Bălteanu R Radu* (Lic. Piteşti).
112. *Boldea Constantin* (Lic. T-Severin).
113. *Lazăr Caius* (Lic. Lugoj).
114. *Nicolescu N. Nicolae* (Coleg. Carol I, Craiova).
115. *Negru Radu Sabin* (Lic. Focşani).
116. *Neuhut Carol* (Lic. Izrailit, Timişoara).
117. *Panaitescu Basarab* (Lic. Călăraşi).
118. *Pikalschi Ovidiu* (Lic. Braşov).
119. *Plopeanu C. Gheorghe* (Lic. Brăila).
120. *Schönberger Vasile* (Lic. Izrailit, Cluj).
121. *Domilescu I. Eugen* (Lic. Loga, Timişoara).
122. *Baciu Virgil* (Lic Loga, Timişoara).
123. *Hirsch Mircea* (Lic Cultura, Bucureşti).
124. *Petrindean Emil* (Lic. Turda).
125. *Ungureanu Ioan* (Lic. Petroşani).
126. *Demeter Gheorghe* (Lic. Roman).
127. *Secheli Ioan* (Lic. Alba- Iulia).
128. *Szep Valeria* (Lic. Notre-Dame, Timişoara).

129. *Zaharescu Alexandru* (Coleg. Carol I, Timişoara).
130. *Diaconu N. Grigore* (Lic. Caracal).
131. *De Paoli Rudolf* (Lic. Petroşani).
132. *Langu St. Dumitru* (Lic. Caracal).
133. *Laszlo Iosif* (Lic. Satu-Mare).
134. *Petrovici Vasile* (Lic. Lugoj).
135. *Rozman Ernst* (Lic. Oradea).
136 *Benea I. Ştefan.*
137. *Cârjeu Aurelian* (Lic. Deva).
138. *Giurgiu Ioan* (Lic. Loga Timişoara).
139. *Fecheie Alexandru* (Lic. Blaj).
140. *Helcovschi Victor* (Lic. Petroşani).
141. *Vătaman Iordache* (Lic. Caracal)
142. *Vădăşan Elena* (Lic. Carmen Sylva, Timişoara).
143. *Gora I. Mircea* (Lic. Brad)
144. *Iliescu D. Dumitru* (Coleg. Carol I, Craiova).
145 *Mustaţă St. Ştefan* (Lic. Brăila).
146. *Poenaru Gheorghe* (Lic. Brad).
147. *Postelnicu Gh. Nicolae* (Lic. N. Filipescu, Predeal).
148. *Teodorov Boris* (Lic. Bălţi).
149. *Todor Nicolae* (Lic. Lugoj).
150. *Blickling Ioan* (Lic. Princz Eugen, Timişoara).
151. *Bogdan Magdalena* (Lic. Carmen Sylva, Timişoara).
152. *Mândruţiu Aurel* (Lic. Turda).
153. *Tăpăloagă Stela* (Lic. Carmen Sylva, Timişoara).
154. *Ciucurel M. Petre* (Lic. Lugoj).
155 *Cosma V. Dante* (Lic. Braşov).
156. *Constantin R Constantin.*
157. *Deac Manole* (Lic. Sibiu).
158. *Dodon A. Eugeniu* (Coleg. Carol I, Craiova).
159. *Gribincea V. Nicolae* (Lic. Loga, Timişoara).
160. *Hila Virgil* (Lic. Orăştie).
161. *Julean D. Dumitru* (Lic. Loga, Timişoara).
162. *Mendelovici Saul* (Lic. Botoşani).
163. *Rădulescu Dumitru* (Lic Slatina).
164. *Georgescu P. Fl. Dan* (Lic. T-Jiu).
165 *Neuhold Ştefan* (Lic. Piarist, Timişoara).
166. *Osman Bebe* (Lic. T-Severin).
167. *Palade Dionisie* (Lic. Deva).
168. *Pătrăşcoiu Constantin* (Lic. T-Jiu).
169. *Alexandrescu N. Traian* (Lic. Braşov).
170. *Breazu V. Ioan* (Lic. Orăştie)
171. *Cârje M. Victor* (Examen de selecţionare).
172. *Gheorghiu A. Dumitru.* (Lic. Brăila).
173. *Ghiciu I. Vasile* (Lic. T-Severin).
174. *Iordache Dumitru* (Lic. T-Severin).
175. *Lăzărescu I. Mihai* (Lic. Constanţa).
176. *Moraru A. Ioan* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti)
177. *Opaschi I. Mihai* (Lic. Piteşti).
178. *Raşcă Ionel* (Lic. Buzeşti, Craiova).
179. *Săia Gh. Nicon* (Lic. R-Vâlcea).
180. *Teasca Octavian* (Lic. Braşov).
181. *Beldian N. Raul* (Lic. Cultura, Bucureşti).
182. *Duţu Gh. D-tru Emanoil* (Lic. Brăila).
183. *Felder Harry* (Lic. Izrailit, Timişoara).
184. *Fischer Tiberiu* (Lic. Satu Mare).
185. *Popa I. Ovidiu* (Lic. Braşov)

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Boerescu P. G. (P); *Braşoveanu Gh.* (P; 2330, 2355, 2367); *Cetăţeanu Stelian* (N); *Chesaru Cristea* (P; 2233, 2339, 2349, 2350, 2352); *Costin Alexandrina* (2265, 2290, 2338, 2339); *Dobrotescu Gh.* (1975, 2096, 2110, 2355); *Filimon Ioan* (P; 2339, 2342, 2352, 2354, 2355, 2357); *Giurconiu M.* (2347, 2355, 2357, 2359); *Goldiş Gh.* (P: 2339, 2350); *Gottard Francisc* (2293, 2323, 2332, 2338, 2339, 2350, 2355, 2357); *Macovei Eugen* (2349, 2350); *Man Octavian* (2342); *Mazilu Marius* (2247, 2251, 2293, 2317, 2318, 2338, 2339); *Meteş Mircea* (P; 2349, 2352); *Pali Sergiu* (1932, 2086, 2087, 2229, 2300); *Safta Nicolae* (2310, 2312, 2338, 2339, 2347, 2350, 2355); *Stoian Anatol* (2209, 2234, 2257, 2265, 2290, 2338, 2339); *Stroescu Florea* (2339, 2355, 2359); *Tenişanu Florea* (P: 2312, 2338, 2342, 2355, 2359); *Ţigănoiu Al.* (P); *Vlad Zubac* (P; 2347, 2354); *Vlăduţ C.* (2357, 2364, 2366, 2367); *Wegener Eugen* (P; 1930, 2159, 2309, 2316).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 300 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 3000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el. şi s'o iscălească.

ANUL XXV. DECEMVRIE 1945 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 80 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **GH. TH. GHEORGIU:** O NOUA INTERPRETAREA TEOREMEI LUI THALES.
2. NOTE MATEMATICE 23, 24, 25.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 2299, 2300, 2305, 2311.
6. PROBLEME PROPUSE: 2377 - 2380.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), este de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 3000 lei fiecare.

ANUL XXV — NO. 10. TIMISOARA, DECEMVRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

O NOUĂ INTERPRETARE A TEOREMEI LUI THALES

DE

GH. TH. GHEORGHIU.

Articolul de față are un caracter elementar și pentruca să poată fi citit de cea mai mare parte dintre colaboratorii noștri, să-mi fie permis să fac mai întâiu o introducere spre a lămuri unele noțiuni pe care apoi le voiu folosi.

În zilele noastre studiul geometriei se face împărțind proprietățile figurilor în trei mari categori: *proprietăți metrice*, *proprietăți afine* și *proprietăți proiective*. Când avem de demonstrat o proprietate este bine să ne dăm mai întîiu seama de felul ei, cu alte cuvinte să vedem în care din cele trei categori de mai sus intră. Dacă am făcut acest lucru, atunci vom folosi metodele de demonstrație caracteristice categoriei în care ne aflăm și deci calea ce trebue urmată este mai ușor de găsit. În cele ce urmează vom vorbi de figuri plane, totul putându-se extinde ușor la cazul figurilor din spațiu.

1. Se zice că o proprietate este *metrică* atunci când elementele ce o formează au la bază *lungimi* și *unghiuri* De exemplu, o proprietate referitore la bisectoarele unui unghiu este o proprietate metrică deoarece bisectoarea se definește cu ajutorul egalității a două unghiuri. Totașa, o proprietate referitoare la un cerc este o proprietate metrică deoarece definiția cercului este legată de noțiunea de lungime, ș. a. m. d. Așa fiind lucrurile, evident că vom folosi în demonstrarea unei asemenea proprități noțiunile și teoremele de geometrie care au la bază lungimi și unghiuri: egalitatea triunghiurilor, asemănarea triunghiurilor, teorema lui *Pitagora*, relații relative la suprafețe, ș. a. m. d.

Din punct de vedere analitic o proprietate metrică se menține atunci când aplicăm coordonatelor diferitelor puncte ale figurei transformarea

$$(I) \qquad \begin{cases} X = x\cos\theta - y\sin\theta + a, \\ Y = x\sin\theta + y\cos\theta + b, \end{cases}$$

unde (x, y) sunt coordonatele carteziene ale unui punct din plan, iar (X, Y) coordonatele carteziene ale punctului transformat. O asemenea transformare se numește o *deplasare*. Dacă (F) este o figură formată de punctele (x, y) și (F′) figura transformată formată din punctele (X, Y), ultima se poate deduce din prima printr'o mișcare de translație combinată cu una de rotație. Cum aceste două mișcări păstrează unghiurile și lungimile, evident că proprietățile metrice ale figurei (F) vor fi aceleași cu ale figurei (F′) [1].

2. Se zice că o proprietate este *afină* atunci când ea poate fi exprimată numai cu *rapoartele* segmentelor formate de puncte colineare și cu *paralelism*. De exemplu, mijlocul unui segment este o proprietate afină, doarece acest punct se definește față de extremitățile segmentului spunându-se că raportul segmentelor determinate de el este unitatea. De aci rezultă că diametrul unei conice este o proprietate afină deoarece un diametru este locul geometric al *mijloacelor* coardelor *paralele* cu o direcție dată. Teorema de geometrie elementară, care formează cel mai frumos exemplu de proprietate afină, este teorema lui *Thales*. Avându-se în vedere forma ei simplă și totodată generală, ea va forma de cele mai multe ori miezul demonstrațiilor proprietăților afine.

Analitic, o proprietate afină își păstrează caracterul atunci când aplicăm figurei transformarea

---

[1]) Afară de *deplasări* mai există o transformare care menține proprietățile metrice: *simetria în raport cu o dreaptă*. Deplasările împreună cu simetria în raport cu o dreaptă dau transformarea cea mai generală care păstreaază aceste proprietăți.

$$(II)\qquad \begin{cases} X = a\,x + b\,y + c, \\ Y = a'\,x + b'\,y + c', \end{cases}$$

unde (x, y) sunt coordonate carteziene ale unui punct oarecare din plan, iar (X, Y) coordonatele carteziene ale punctului transformat, numerele a, b, c, a', b', c' fiind arbitrare supuse la unica condiție: $a\,b' - a'\,b \neq 0$.

3. O proprietate se zice că este *proiectivă*, atunci când exprimarea ei se face cu *colinearitate, concurență* sau *rapport anarmonic*. De exemplu, trei puncte coliniare sau trei drepte concurente sunt proprietăți preiective. Totaşa polara unui punct față de o conică, deoarece această dreaptă se definește cu ajutorul raportului armonic.

Caracterul analitic al proprietăților proiective este că ele se mențin supunând punctele figurei unei transformări de forma

$$(III)\qquad \begin{cases} X = a\,x + b\,y + c\,z, \\ Y = a'\,x + b'\,y + c'\,z, \\ Z = a''\,x + b''\,y + c''\,z, \end{cases}$$

unde $(x\ y, z)$ sunt coordonatele omogene ale unui punct din plan, iar (X, Y, Z) coordonatele omogene ale punctului transformat, constantele $a, b, c, \ldots$ fiind arbitrare.

Depe forma transformărilor (I), (II), (III) se vede imediat că proprietățile afine sunt cazuri particulare ale proprietăților proiective, deoarece (II) se deduce (III) făcând $a'' = b'' = 0$ şi $c'' = 1$; iar proprietățile metrice sunt cazuri particulare ale proprităților afine, deoarece se vede imediat că (I) este de aceiaşi formă cu (II), numai că coeficienții sunt particularizați.

În ceiace privește demonstrațiile proprietăților proiective, ele se fac în general reducându-le la proprietăți afine, care sunt mai simple, cu ajutorul proiecției conice şi cu ajutorul introducerei elementelor de la infinit. Un exemplu clasic de asemenea demonstrație il formează teorema lui *Pappus* care reduce demonstrarea faptului că o diagonală a unui patrulater oarecare este împărțită de celelalte două într'un raport armonic, la proprietatea banală a diagonalelor unui paralelogram de a se tăia în părți egale.

Cu ajutorul elementelor la infinit, geometria proprietăților afine, apare ca un caz particular al geometriei proprităților proiective, transformând dreapta dela infinit a planului în ea însăşi; iar geometria proprietăților metrice este un caz particular al celei afine păstrând în plus pe această dreaptă două puncte fixe numite *punctele ciclice* ale planului.

După această lungă introducere să arătam că teorema lui *Thales* apare ca un caz particular al proprietăților raportului anarmonic, lucru ce va rezulta dintr'o examinare amănunțită a acestor proprietăți.

Fiind date patru puncte coliniare A, B, C, D (fig. 1) se numeşte raportul anarmonic, expresia

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

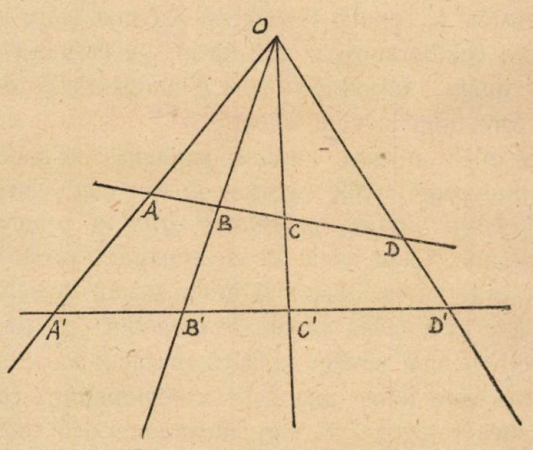


Fig. 1.

Dacă D este punctul dela infinit al dreptei (adică punctul unde dreapta taie dreapta dela infinit a planului), să-l notăm cu D_∞, atunci raportul anarmonic se reduce la raportul simplu

$$(ABCD_\infty) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Se demonstrează că proiectând dintr'un punct O cele patru puncte A, B, C, D pe o a doua dreaptă oarecare în A', B', C', D', avem

$$(a)\qquad (ABCD) = (A'\,B'\,C'\,D').$$

Această proprietate fundamentală a raportului anarmonic admite, în cazul când A se confundă cu A' reciproca: dacă egalitatea (a) este adevărată, în care

$A \equiv A'$, atunci dreptele BB', CC', DD' sunt concurente (fig. 2). În acest ultim caz dacă presupu-

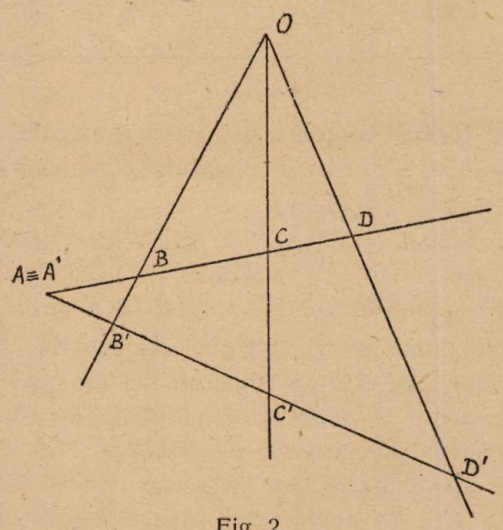


Fig. 2.

nem că dreapta ODD' este dreapta dela infinit a planului (fig. 3), atunci O este aruncat la infinit şi

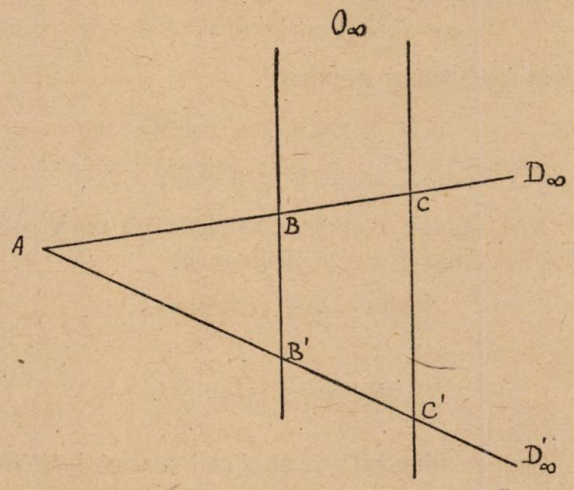


Fig 3.

deci dreptele OBB', OCC' trebuind să se întâlnească la infinit, sunt paralele, iar D, D' fiind deasemeni la infinit egalitatea (a) cu mici transformări se scrie

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}.$$

Teorema de mai sus ia deci forma următoare: *condiţia necesară şi suficientă ca o dreaptă să fie paralelă cu una din laturile unui triunghiu, este ca ea să împartă pe celelalte două în rapoarte egale.* Aceasta este teorema lui *Thales*. Ea este deci un caz particular al proprietăţii fundamentale a raportului anarmonic de a fi proiectiv.

Rezultatul obţinut era de aşteptat. El conţine însă un lucru interesant. Anume, arată cum întotdeauna unei proprietăţi proiective putem face să-i corespundă una afină şi cu puţină abilitate, putem transforma o proprietate afină într'una mai generală proiectivă.

NOTE MATEMATICE

23. — *Asupra rădăcinii patrate a numerelor complexe.*

În nota 18, p. 94 din „R M. T.", Anul XXV, am expus o nouă metodă pentru stabilirea formulelor cari permit într'un anumit caz transformarea expresiilor de forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \text{ cu } a > \sqrt{b} > 0,$$

într'o sumă algebrică de două iraţionale simple.

Într'o ordine de idei conexă, vom expune acum o metodă asemănătoare pentru stabilirea formulelor relative la extragerea rădăcinii patrate a numerelor complexe de forma

$$a \pm bi \text{ cu } b > 0 \text{ şi } i = \sqrt{-1}.$$

Pentru înţelegerea deplină a celor ce urmează, reamintim în prealabil că, orice număr complex admite, întocmai ca şi numerele reale, două rădăcini patrate, cari sunt două numere complexe opuse, adică a căror sumă este nulă. Dintre aceste două rădăcini se obişnueşte a i-se da numele de *rădăcină aritmetică* aceleia care are drept coeficient al părţii imaginare un număr pozitiv.

Rădăcina patrată aritmetică a unui număr complex corespunzând rădăcinii patrate pozitive a unui număr real şi pozitiv, ne vom ocupa exclusiv de aceasta, aşa încât, procedând analog cu cele din cuprinsul notei amintite, vom avea de considerat acum expresia:

$$(1) \qquad x = \sqrt{a + \varepsilon b i}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Ridicând această expresie la patrat, obţinem:

$$(2) \qquad x^2 = a + \varepsilon b i, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

de unde, făcând apoi substituția:

$$(3)\qquad x = y + \frac{\varepsilon b i}{2y},$$

deducem ecuația bipatrată:

$$(4)\qquad 4y^4 - 4ay^2 - b^2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$(5)\quad \begin{cases} y_1' = -y_2' = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \\ y_1'' = -y_2'' = i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \end{cases}$$

E ușor însă de arătat că acestor patru valori ale lui y, le corespund numai două valori distincte pentru x, cari și ele nu diferă, la rândul lor, decât prin semn.

În adevăr, înlocuind valorile lui y de mai sus în relația (3) și ținând în acelaș timp seama că

$$(6)\qquad y_1' y_1'' = y_2' y_2'' = \frac{bi}{2},$$

ceeace se poate constata chiar în baza relațiilor (5), găsim că valorile respectiv corespunzătoare ale lui x sunt:

$$(7)\quad \begin{cases} x_1' = -x_2' = y_1' + \varepsilon y_1'' = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \varepsilon i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \\ x_1'' = -x_2'' = y_1'' + \varepsilon y_1' = i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \varepsilon\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \end{cases}$$

Pe formulele (7) vedem că, dacă $\varepsilon = +1$, atunci

$$(8)\quad x_1' = x_1'' = -x_2' = -x_2'' = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

iar dacă $\varepsilon = -1$, atunci

$$(9)\quad x_2' = x_1'' = -x_1' = -x_2'' = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

și astfel e dovedit că, în ambele cazuri, celor patru valori ale lui y din (5) le corespund numai două valori pentru x date de ecuația (2).

Reținând din aceste valori pe cele cari au coeficientul părții imaginare pozitiv, deducem prin strângerea rezultatelor, că *rădăcina aritmetică* a ecuației (2) este

$$(9)\qquad x = \varepsilon\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

de unde prin comparație cu (1), obținem apoi explicit:

$$(10)\qquad \boxed{\sqrt{a+\varepsilon b i} = \varepsilon\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}},$$

$$(\varepsilon = \pm 1)$$

adică, tocmai formula clasică pentru calculul *rădăcini patrate aritmetice* a numărului complex $a+\varepsilon bi$ cu $b>0$ și $i=\sqrt{-1}$.

EUGEN VISA

---

24. — *Sur le triangle spécial* $\cot V = 2$.

Étant donné un triangle quelconque ABC, si, sur le même côté BC on construit des triangles ayant même angle V de *Brocard* que ABC, les sommets sont situés sur un cercle de *Neuberg* (N_a). T et T′ étant les contacts des tangentes BT et BT′ au cercle (N_a), les angles d'un triangle équibrocardien avec ABC varient entre un minimum $TBC = 2V_1$ (V_1 *premier* angle de *Steiner*) et un maximum $T'BC = 2V_2$ (V_2 *second* angle de *Steiner*).

Les angles V_1 et V_2 vérifient l'équation

$$\cot^2 V_1 - 2\cot V \cot V_1 + 3 = 0$$

dont les racines donnent [1]

$$(1)\qquad \cot V_1 = \cot V + \sqrt{\cot^2 V - 3},$$

$$(2)\qquad \cot V_2 = \cot V - \sqrt{\cot^2 V - 3}.$$

2° Dans le triangle particulier où $\cot V = 2$ [2], les formules (1) et (2) deviennent

$$\cot V_1 = 3, \quad \cot V_2 = 1,$$

de sorte que

$$V + V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Cette relation est une application assez inattendue de la propriété connue [3]

Sur deux demi-axes rectangulaires Ox *et* Oy *on marque les points* A, et B, C, D *tels que*

$$OA = OB = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{3}OD.$$

---

[1]) *J. Neuberg* et *A. Gob*, *A. F. A. S.* 1889, pp. 171—172.

[2]) *V. Thébault*, *Mathesis*, 1924—94; 1931—192 et 284; 1934 (supplément). *Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, 1934—94; *L'Ens. Math.* (Genève), 1935—324, etc.

[3]) *Lionnet*, *Nouvelles Annales*, 1873—384.

La somme des angles OBA, OCA, ODA *est égale à un droit.*

V. THÉBAULT

---

25. — *O generalizare în legătură cu punctele isotomice.*

Pe o dreaptă considerăm punctele α, B, C, A_1; fie M conjugatul armonic al lui α față de BC și A′ conjugatul lui A_1 față de AM. Vom arăta că *rolul punctelor* A', A_1 *generalizează rolul punctelor isotomice* față de segmentul $\overline{BC}$.

Avem mai întâi din definiție, notând cu litere mici corespunzătoare, abscisele punctelor, raportate la originea α

$$\frac{2}{m}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{a_1},$$

sau

$$a'=\frac{a_1 b c}{(b+c)a_1-bc}$$

este ușor atunci să justificăm că

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A_1C}}=\frac{b^2}{(b+c)a_1-bc}.$$

și

$$(1)\qquad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\frac{\overline{\alpha B}^2}{\overline{\alpha C}^2}\cdot\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}.$$

Fie acum un triunghiu ABC, o dreaptă Δ care taie laturile în α, β, γ și A_1, B_1, C_1 trei puncte pe laturi. Definim ca mai sus punctele M, N, P; apoi punctele A′, B′, C′. Relația precedentă conduce la

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}\cdot\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1$$

ceeace, conform teoremei lui *Carnot* arată că *punctele* A′, B′, C′, A_1, B_1, C_1 *sunt situate pe o conică.*

Rezultă de aici că *dacă* A_1, B_1, C_1 *sunt pe o dreaptă* D_1, *atunci* A′, B′, C′ *sunt pe o dreaptă* D′— isotomica generalizată a lui D_1; *dacă* A_1, B_1, C_1 *sunt picioarele cevienelor unui punct* U_1, *atunci* A′, B′, C′ *sunt picioarele cevienelor unui punct* U′ — isotomicul generalizat al lui U_1.

Punctele M, N, P sunt picioarele cevienelor unui punct O, polul trilinear al dreptei Δ. Considerațiile precedente rămân valabile dacă pornim dela α, β, γ picioare de ceviene concurente.

Când Δ este dreapta dela infinit, deci M, N, P mijloacele laturilor regăsim proprietățile punctelor isotomice. De altfel, generalizarea precedentă putea fi justificată printr'o proiecție conică. Am preferat metoda directă pentru a ajunge la relația (1).

N. N. MIHAILEANU

POLITEHNICA DIN TIMIȘOARA

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE ÎNTRARE, Octomvrie 1945.

GEOMETRIE.

Se dă semicercul ACB cu diametrul $\overline{AB}=2R$ și centru O. Construim tangenta la semicerc paralelă cu diametrul AB și fie C punctul ei de contact.

Pe această tangentă, deoparte și de alta a punctului C, luăm segmentele $\overline{CN}$ și $\overline{CM}$ egale cu $\frac{1}{7}R$, punctul N, fiind de aceeași parte cu A față de OC.

Din N și M ducem tangentele $\overline{NE}$ și $\overline{MD}$ la semicercul (O), care prelungite întâlnesc tangentele în A și B la același semicerc, respectiv în P și Q. (E și D sunt punctele de contact ale tangentelor $\overline{NE}$ și $\overline{MD}$).

Să se arate, că:

a) MNED și DEPQ sunt trapeze isoscele.

b) Raportul între perimetrul poligonului ABQMNP și raza semicercului este comensurabil. Asemenea pentru perimetrele trapezelor MNED și DEPQ. (Se va calcula valorile acestor trei rapoarte).

c) Raportul ariei poligonului ABQMNP către aria patratului făcut pe rază este egal cu raportul *razei* către coarda de contact $\overline{DE}$. Asemenea raportul ariei PNMQ către patratul razei este egal cu raportul tangentei $\overline{MN}$ către rază.

2. d) Să se calculeze volumul înnăscut de aria, cuprinsă între cele două contururi poligonale BQMNPA și BDCEA, când se rotește în jurul diametrului $\overline{AB}$ de o rotație complectă (360°).

e) Să se calculeze volumul înăscut de aria cuprinsă între semicerc și conturul poligonal BQMNPA, când o rotim în jurul axei OC de 180°.

(6 Noemvrie, orele 3—6).

ALGEBRĂ.

I.

Să se determine constantele a, b, λ astfel ca derivata funcției

$$y=\frac{ax^3+b+9\lambda}{x-2}-5\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x-2}+\mathrm{L}\left(\frac{x^2+4}{x-2}\right)^{5\lambda}$$

să se anuleze pentru $x=-1$, $x=0$ și $x=1$. Să se afle toate rădăcinele derivatei, după ce în prealabil s'au înlocuit a, b, λ cu valorile găsite.

(L înseamnă logaritm neperian).

II.

Se dă ecuaţia

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

cu rădăcinele x_1, x_2.

Să se găsească ecuaţia de gradul al 2-lea cu rădăcinele

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{x_1^3}, \quad y_2 = x_2 - \frac{1}{x_2^3}.$$

III.

Pentru ce valori reale a şi b ecuaţia

$$x^6 - a^2 x^5 + b\,x^4 + x^2 - 4\,x + 13 = 0$$

admite rădăcina $2 + 3\,i$? $(i = \sqrt{-1})$.

Inlocuind în ecuaţie pe a şi b cu valorile găsite, să se rezolve complet ecuaţia dată.

(7 Noemvrie, orele 8—11)

TRIGONOMETRIE.

I.

Unui cerc de rază R, i se duce tangenta AT, într'un punct A. Se duce, în acest cerc, o coardă BC, căreia să-i corespundă unghiul la centrul 2α (α ascuţit).

a) Să se calculeze, în funcţie de R şi α, lungimea coardei BC şi distanţa ei OM de centrul cercului.

b) Să se calculeze, în funcţie de R, α şi de unghiul $A\,\widehat{O}\,M = x$, aria trapezului $BB'CC'$, unde $B'M'C'$ sunt proecţiile punctelor B, M, C pe tangenta AT.

c) Să se determine unghiul x astfel ca aria trapezului $BB'CC'$ să fie egală cu o valoare dată a^2. Discuţie.

d) Să se determine x, astfel ca aria trapezului $BB'CC'$ să fie maximă sau minimă. Discuţie.

II.

Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a, \\ \cos(x + y) = b, \end{cases}$$

unde a şi b sunt date. Discuţie.

III.

Să se determine arcele x care satisfac inegalitatea

$$4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} > 4.$$

IV.

Să se rezolve ecuaţia

$$\cos 5x + \cos 3x - a \cos x \cos 2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\cos x = 9.$$

Discuţie.

(7 Noemvrie, orele 3—6).

CHESTIUNI DE ORAL
GEOMETRIE.

1. Se consideră pe latura AB a unui triunghiu oarecare ABC trei puncte E, D, F (ordinea punctelor este A, E, D, F, B) astfel ca

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{ED} = \frac{FD}{FB} = \frac{m}{n}.$$

Prin E şi F se duce câte o paralelă la BC care ta e pe AC respectiv în E' şi F'. Se cere să se calculeze raportul

$$\frac{FF'}{EE'}.$$

în funcţie numai de m, n.

2. Se consideră o piramidă având vârful în V şi baza un triunghiu ABC. Să se demonstreze că dacă proiecţia lui V pe bază se află pe înălţimea vârfului A, atunci muchiile opuse BC şi VA sunt perpendiculare.

3. Se consideră în raport cu axele perpendiculare Ox Oy punctul A (a, b) şi se cere:

a) Ecuaţia dreptei (D) simetrica lui Ox faţă de OA.

b) Pe mijlocul lui OA se ridică o perpendiculară care taie pe Ox în M şi pe Oy în N. Se cer coordonatele punctului I situat pe această dreaptă astfel ca

$$\frac{IM}{IN} = -k.$$

c) Cercul cu centrul în I şi trecând prin O şi A taie pe Ox în P iar pe (D) în Q. Să se găsească locul geometric al mijlocului lui PQ când I variază pe dreapta MN.

(8 Noemvrie, orele 8—11).

ALGEBRĂ.

I.

Dându-se relaţia:

$$8\,C_m^5 = 3\,A_{m-1}^3$$

să se afle m.

II.

Se dă ecuaţia:

$$x^2 - (2\alpha - 1)\,x + (4\alpha^2 - 10\alpha - 5) = 0.$$

Să se discute cu ajutorul realizantului, natura rădăcinilor, când parametrul α variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

III.

Să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 - 4\,x^3 + 5\,x^2 - 4\,x + 1 = 0.$$

IV.

Se dă funcţiunea:

$$y = 2 \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4x - x^2}$$

a cărei reprezentare grafică este o anumită curbă. Să se determine pentru $x = 1$, unghiul pe care tangenta la această curbă, îl face cu axa Ox. (Nu se cere reprezentarea grafică, ci numai unghiul pe care tangenta îl face cu Ox, pentru $x = 1$).

V.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

logaritmii fiind cei zecimali.

VI.

Se dă ecuaţia:

$$2x^3 - 8x^2 + \alpha x - 3 = 0.$$

Să se determine parametrul α astfel ca între rădăcini să avem relaţia:

$$x_1 = 3(x_2 + x_3)$$

şi apoi să se rezolve ecuaţia.

(8 Noemvrie, orele 3–6).

TRIGONOMETRIE.

1. a) Să se rezolve un triunghiu oarecare cunoscând o latură, unghiul opus „$\hat{A}$", şi mediana „m" care pleacă din A.

b) Intr'un triunghiu ABC să se exprime lungimile bisectoarelor l_1 şi l_2 în funcţie de b, c, şi $\hat{A}$ (l_1 şi l_2 bisectoare interioară şi exterioară a unghiului $\hat{A}$).

2. Ştiind că tg α şi tg β sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + px + q = 0,$$

să se calculeze în funcţie de p şi q valoarea expresiei

$$E = \sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta)$$

3. Să se rezolve:

a) Ecuaţia $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$

b) Sistemul de Ecuaţii $\begin{cases} \cos 3x - \cos 3y = m \\ \cos x - \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

4. Să se facă calculabilă prin logaritm:

a) $\dfrac{\sin a + \cos b}{\cos a - \sin b}$ b) $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

5. Să se demonstreze identităţile:

a) $$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cot}^2 x = 2\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

b) $$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}.$$

(9 Noemvrie, orele 9–11).

FACULTATEA DE AGRONOMIE

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE INTRARE, Noemvrie 1945.

MATEMATICI GENERALE.

I.

Avem un un teren ABCD de forma unui dreptunghiu. Se împarte latura CD în trei părţi egale

$$CE = EF = FD.$$

Se formează apoi trapezul ABEF al cărui perimetru este 260 m., latura EB = 50 m.

1°. Să se arate că trapezul ABEF este isoscel.

2°. Să se afle suprafaţa acestui trapez.

3°. Unind mijloacele G şi H ale laturilor BE şi AF, să se calculeze raportul între suprafaţa trapezului ABGH şi aceea a terenului ABCD.

II.

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x + y = 40 \\ x^3 + y^3 - x - y = 30 \end{cases}$$

III.

Se dă tg $x = 2$. Să se calculeze sin $2x$ şi cos $2x$.

IV.

Un turn vertical AB se află pe malul unui râu. De partea opusă a râului se află un observator cu o lunetă aşezată pe un tripied înalt de 1 m. cu ajutorul căreia măsoară unghiurile CDA şi CEA, dreapta CDE fiind orizontala situată la înălţimea de 1 m. de baza turnului.

Ştiind că DE = 10 m., $\sphericalangle$ CDA = 45° şi $\sphericalangle$ CEA = 30°, să se calculeze înălţimea turnului şi lungimele razelor vizuale OA şi EA.

(27 Noemvrie, orele 8—11).

CHESTIUNI DE ORAL

I.

1° O sticlă ce conţine 1 Kg. de vin costă 2100 lei. Vinul este mai scump decât sticla cu 2000 lei. Cât costă vinul şi cât costă sticla?

2° Din sticla cu vin se bea 200 grame şi se toarnă apoi 100 grame sifon; se bea încă $\frac{2}{5}$ din amestec şi se pune 200 grame de sifon şi se mai bea din conţinutul sticlei $\frac{3}{5}$ şi se pune 150 grame sifon. Să se afle cât vin şi cât sifon a rămas în sticlă după aceste operaţii?

II.

Se dă un triunghiu dreptunghiu ABC a cărui perimetru este 24 m. şi a cărui suprafaţă este 24 m². Să se calculeze laturile triunghiului ABC.

III.

Dintr'un punct A exterior unui cerc O de rază r se duce o tangentă AB. Se uneşte B cu O şi se prelungeşte BO până întâlneşte din nou cercul în C Ştiind că $OA = 2r+3$ metri şi AB = 12 metri, se cere:

1° Raza r a cercului,

2° Lungimea segmentului AC.

IV.

Să se determine arcele x şi y astfel ca

$$\begin{cases} x + y = 60^\circ \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

(28 Noembrie, orele 8—10).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No. 3, Noemvrie 1945. Asupra distribuției numerilor prime, de Dr. Ing *I. Linteș*. Asupra indicatorilor, de *Tiberiu Popoviciu*. Triunghiul cu două bisectoare egale (urmare și sfârșit), de *I. Ionescu*. Raport pentru decernarea premiului *V. Conta* de Ing. *Al. D. Bunescu*, Prof. *P. Sergescu* și *Șerban Țițeica*. Note matematice, Probleme rezolvate și propuse.

2. *Michel Ghermănescu*. Sur les valeurs moyennes des fonctions. (Extrait du Bulletin Scientifique de L'École Politechnique de Timișoara, Tome 12, Fasc 1—2).

3. Prof. Dr. Ing. *Ștefan Nadașan*. Curs de rezistența materialelor și Statica grafică (Partea I-a) Este un minunat volum litografiat în cele mai bune condiții cu deosebit aspect estetic și cuprinde 508 pagini cu 425 figuri.

Acest curs conține materia predată cu toată competența de profesorul autor, studenților politehnicei din Timișoara îl recomandăm călduros la toți studenții politehnicelor din țară și D-lor ingineri.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2299. — *Să se descompună în factori expresia*

$$E=(x-3y+5z)^3-(3x-5y+7z)^3+8(x-y+z)^3.$$

ILIE CONSTANTINESCU

Soluție dată de d-l Gligor Ioan (student, Timișoara).

Ținând seamă de identitatea

$$u^3-v^3=(u-v)^3+3uv(u-v),$$

putem scri succesiv

$$\begin{aligned}E&=(x-3y+5z-3x+5y-7z)^3+\\&\quad 3(x-3y+5z)(3x-5y+7z)(x-3y+5z-\\&\quad 3x+5y-7z)+8(x-y+z)^3\\&=(-2x+2y-2z)^3+3(x-3y+5z)\times\\&\quad(3x-5y+7z)(-2x+2y-2z)+\\&\quad 8(x-y+z)3=-8(x-y+z^3-\\&\quad 6x-3y+5z)(3x-5y+7z)(x-y+z)+8(x-y+z)^3\\&=-6(x-y+z)(x-3y+5z)(3x-5y+7z).\end{aligned}$$

Alte soluții date de d-nii: *Barbu Ion*, *Barusco Giovanni* (Lic. Petroșani), *Birănaș Ioan* (Arad), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Brasch Andrei* (Polit, Timișoara), *Chesaru Cristea* (Polit., Timișoara), *Chiriac C-tin*, *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraș), *Miclea Nicolae* (Polit, Timișoara), *Ovesea Nicolae* (Polit, Timișoara), *Pop Emil* (Polit, Timișoara), *Roth Rudolf Egon* (Polit, Timișoara), *Simcso Carol* (Polit., Timișoara), *Stanciu Petre* (Polit, Timișoara) și *Tincu C-tin* (Polit, Timișoara).

Problema 2300. — *Să se dezvolte determinantul*

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\(a+b)^2 & (b+c)^2 & (c+a)^2\\(a+b)(a^2+b^2) & (b+c)(b^2+c^2) & (c+a)(c^2+a^2)\end{vmatrix},$$

punând rezultatul sub formă de produs de factori.

MARIA NEUMANN

Soluție. Scăzând din elementele coloanelor II și III elementele corespunzătoare din prima coloană și notând cu Δ determinantul, putem scri succesiv

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\(a+b)^2 & (b+c)^2-(a+b)^2 & (c+a)^2-(a+b)^2\\(a+b)(a^2+b^2) & (b+c)(b^2+c^2)-(a+b)(a^2+b^2) & (c+a)(c^2+a^2)-(a+b)(a^2+b^2)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2-(a-b)^2 & (c+a)^2-(a+b)^2\\(b+c)(b^2+c^2)-(a+b)(a^2+b^2) & (c+a)(c^2+a^2)-(a+b)(a^2+b^2)\end{vmatrix}.$$

Cum avem

$$(b+c)^2-(a+b)^2=(b+c+a+b)(b+c-a-b)=(c-a)(a+2b+c);$$

$$(c+a)^2-(a+b)^2=(c-b)(b+2a+c);$$

$$(b+c)(b^2+c^2)-(a+b)(a^2+b^2)=b^3+bc^2+b^2c+c^3-a^3-ab^2-a^2b-b^3=c^3-a^3+b(c^2-a^2)+$$
$$b^2(c-a)=(c-a)(c^2+ac+a^2+bc+ba+b^2)=(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca);$$
$$(c+a)(c^2+a^2)-(a+b)(a^2+b^2)=(c-b)(a+b^2+c^2+ab+bc+ca),$$

rezultă că determinantul Δ devine

$$\Delta=\begin{vmatrix}(c-a)(a+2b+c) & (c-b)(b+2a+c)\\ (c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) & (c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\end{vmatrix}$$
$$=(c-a)(c-b)(\Sigma a^2+\Sigma ab)\begin{vmatrix}a+2b+c & b+2a+c\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(c-a)(c-b)(b-a)(\Sigma a^2+\Sigma ab).$$

Avem astfel determinantul dat sub forma de produs de factori.

Soluţii date de d-nii: *Avram Christache* (Lic. Brăila), *Birănaş Ioan* (Arad), *Bogza Mihai* (Lic Deva), *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Braşoveanu Gh* (Colegiul, Craiova), *Chesaru Cristea* (Polit, Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Filimon Ioan* (Lic. Milit, Timişoara), *Giurconiu Mihail* (Polit., Timişoara), *Gottard Francisc* (Polit., Timişoara), *Huzău Ion* (Petroşani), *Nedelcu Ulpius* (Lic. Milit., Timişoara), *Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Plângu Ioan* (Lic Tulcea), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Roth Rudolf Egon*, *Rothenştein Bernhard* (Polit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit, Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara), *Stoian Anatol* (Polit, Timişoara), *Stroescu Florea* (Lic. Caracal), *Tincu C-tin* (Polit., Timişoara) şi *Vrânceanu Gh.* (Lic. Milit, Timişoara).

Problema 2305. — *Dându-se ecuaţia*

$$x^3+px+q=0$$

cu rădăcinele $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ *să se formeze ecuaţia care are ca rădăcini* $\sec^2\alpha$, $\sec^2\beta$, $\sec^2\gamma$.

CPT. M. GRUMAZESCU

Prima soluţie. Rădăcinele ecuaţiei date fiind

$$x_1=\sin\alpha,\quad x_2=\sin\beta,\quad x_3=\sin\gamma,$$

iar rădăcinele ecuaţiei cerute, în funcţie de x_1, x_2, x_3 fiind conform enunţului

$$y_1=\sec^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{1-x_1^2},$$
$$y_2=\frac{1}{1-x_2^2},\quad y_3=\frac{1}{1-x_3^2},$$

rezultă că între rădăcinele ecuaţiei cerute şi a celei date, avem relaţia

$$y=\frac{1}{1-x^2}.$$

De aci deducem

$$(1)\qquad x^2=\frac{y-1}{y}.$$

Înlocuind această valoare în ecuaţia dată, avem

$$\frac{(y-1)x}{y}+px+q=0,$$

deci

$$(2)\qquad x=\frac{qy}{1-(p+1)y}.$$

Eliminând pe x între relaţiile (1) şi (2), obţinem

$$\frac{q^2y^2}{[1-(p+1)y]^2}=\frac{y-1}{y},$$

sau

$$q^2y^3=[1+(p+1)y^2-2(p+1)y](y-1).$$

Ordonând după puterile lui y, găsim

$$[(p+1)^2-q^2]y^3-(p^2+4p+3)y^2+(2p+3)y-1=0.$$

Avem astfel ecuaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Beschea Radu* (Lic. Brăila) şi *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila).

Soluţia 2-a. Însemnăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinele ecuaţiei date, adică

$$x_1=\sin\alpha,\quad x_2=\sin\beta,\quad x_3=\sin\gamma.$$

Relaţiile cunoscute între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei date, permit a scri

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p\\ x_1x_2x_3=-q.\end{cases}$$

De altă parte, dacă însemnăm cu y_1, y_2, y_3 rădăcinele ecuaţiei ce ni se cere să formăm, conform enunţului, avem

$$y_1=\sec^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{1-x_1^2},\quad \text{analog,}$$
$$y_2=\frac{1}{1-x_2^2},\quad y_3=\frac{1}{1-x_3^2}.$$

Acum, calculând suma, suma produselor câte două şi produsul acestor rădăcini y_1, y_2, y_3, găsim succesiv

$$(2)\quad \begin{cases} y_1+y_2+y_3=\dfrac{1}{1-x_1^2}+\dfrac{1}{1-x_2^2}+\dfrac{1}{1+x_3^2}=\dfrac{(1-x_2^2)(1-x_3^2)+(1-x_3^2)(1-x_1^2)+(1-x_1^2)(1-x_2^2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)} \\ \qquad =\dfrac{3-2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2}{1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2)-x_1^2x_2^2x_3^2}, \\ y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\dfrac{1}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}+\dfrac{1}{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}+\dfrac{1}{(1-x_3^2)(1-x_1^2)}=\dfrac{3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)} \\ \qquad =\dfrac{3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2)-x_1^2x_2^2x_3^2}, \\ y_1y_2y_3=\dfrac{1}{1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2)-x_1^2x_2^2x_3^2}, \end{cases}$$

Cum, având în vedere relaţiile (1), putem scri

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-2p,$$
$$x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=p^2,$$
$$x_1x_2x_3=-q,$$

rezultă că relaţiile (2) devin

$$y_1+y_2+y_3=\frac{3+4p+p^2}{1+2p+p^2-q^2},$$

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\frac{3+2p}{1+2p+p^2-q^2},$$

$$y_1y_2y_3=\frac{1}{1+2p+p^2-q^2}.$$

Având astfel cunoscut suma, suma produselor câte două şi produsul rădăcinilor y_1, y_2, y_3, putem forma următoarea ecuaţie de gradul al 3-lea

$$y^3-\frac{3+4p+p^2}{1+2p+p^2-q^2}y^2+\frac{3-p^2}{1+2p+p^2-q^2}y-\frac{1}{1+2p+p^2-q^2}=0.$$

sau

$$[(p+1)^2-q^2]y^3-(p^2+4p+3)y^2+(2p+3)-1=0.$$

Aceasta este ecuaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Birănaş Ioan* (Arad), *Brasch Andre*, (Polit., Timişoara), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Coţiu Aurel* (Lic. Beiuş), *Filimon Ioan* (Polit., Timişoara), *Filip Petre* (Lic. Câmpina), *Georgescu Hristu* (Polit., Timişoara). *Goldiş Gh.* (Polit, Timişoara), *Mazilîu Marius* (Lic Făgăraş), *Meteş Mircea*, *Ovesea Nicolae* (Polit, Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Popa Vasile* (Lic. Beiuş), *Rohrlich Alfred* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Polit., Timişoara) şi *Vrânceanu Gh.* (Lic. Milit. Timişoara).

Problema 2311. — *Să se dezvolte sub formă calculabilă prin logaritmi determinantul:*

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1} & \operatorname{cotg} B & \operatorname{cotg} C \\ \sum \dfrac{r}{p}\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2} & \sum\left(1-\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}\right) & 1 \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} B & \dfrac{2\sin^2(A+B)}{\sin 2C} \end{vmatrix},$$

unde A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu.*

M GIURCONIU

Soluţie. În prealabil, simplificăm elementele determinantului dat, ţinând seamă de formule cunoscute din trigonometrie şi avem astfel succesiv:

$$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 A}-1}=\sqrt{\frac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A}}=$$

$$\frac{\cos A}{\sin A} = \operatorname{cotg} A,$$

$$\sum \frac{r}{p} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p} \sum \operatorname{cotg} \frac{A}{2} =$$

$$\frac{r^2}{rp} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{s}{rp} = \frac{s}{s} = 1,$$

(Compléments de Trigonométrie, par F. G. M. pp. 70 şi 210).

$$\sum \left(1 - \frac{\cos C}{\sin A \sin B}\right) = \sum \frac{\sin A \sin B + \cos(A+B)}{\sin A \sin B} =$$

$$\sum \frac{\sin A \sin B + \cos A \cos B - \sin A \sin B}{\sin A \sin B} =$$

$$\sum \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1,$$

(C. de P. de *V. Cristescu*).

$$\frac{2\sin^2(A+B)}{\sin 2C} = \frac{2\sin^2 C}{2\sin C \cos C} = \frac{\sin C}{\cos C} = \operatorname{tg} C$$

În virtutea acestor relaţii, determinantul Δ dat, notat cu Δ, devine

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{cotg} A & \operatorname{cotg} B & \operatorname{cotg} C \\ 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} B & \operatorname{tg} C \end{vmatrix}.$$

Scăzând elementele coloanei a 2-a şi a 3-a din elementele corespunzătoare ale primei coloane, putem scri

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{cotg} A & \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B & \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} C \\ 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B & \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} C \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B & \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} C \\ \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B & \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} C \end{vmatrix}.$$

Cum avem,

$$\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B = \frac{\sin B \cos A - \sin A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B},$$

$$\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} C = \frac{\sin(C-A)}{\sin A \sin B},$$

$$\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}, \quad \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} C = \frac{\sin(A-C)}{\cos A \cos C},$$

urmează că determinantul Δ, devine

$$\Delta = - \begin{vmatrix} \frac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B} & \frac{\sin(C-A)}{\sin A \sin C} \\ \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} & \frac{\sin(A-C)}{\cos A \cos C} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\sin(A-B)\sin(A-C)}{\sin A \cos A} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin B} & \frac{1}{\sin C} \\ \frac{1}{\cos B} & \frac{1}{\cos C} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\sin(A-B)\sin(A-C)}{\sin A \cos A} \cdot \left(\frac{1}{\sin B \cos C} - \frac{1}{\sin C \cos B}\right) =$$

$$\frac{\sin(A-B)\sin(A-C)\sin(C-B)}{\sin A \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \cos C} =$$

$$\frac{8\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}.$$

Avem astfel dezvoltat determinantul dat într'o formă calculabilă prin logaritmi.

Soluţii date de d-nii: *Arnăutu Marin* (Polit., Timişoara), *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Beşchea Radu* (Lic. Brăila), *Birănaş Ioan* (Arad), *Bogza Mihai* (Lic Deva), *Brasch Andrei* (Polit, Timişoara), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Georgescu Hristu* (Polit., Timişoara), *Mazilu Marius* (Lic. Făgăraş), *Ovesea Nicolae* (Polit, Timişoara), *Rohrlich Alfred* (Polit., Timişoara), *Şafta Nicolae* (Caracal), *Serengău Mihai* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit, Timişoara), *Tincu C-tin* (Polit, Timişoara), *Vlăduţ C-tin* (Polit, Timişoara) şi *Vrănceanu Gh.* (Lic. Milit, Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

2377. — Să se calculeze suma

$$\frac{\sqrt{102}}{1+\sqrt{103}} + \frac{\sqrt{102\times 101}}{(1+\sqrt{103})(1+\sqrt{102}} +$$

$$\frac{\sqrt{102\times 101\times 100}}{(1+\sqrt{103})(1+\sqrt{102})(1+\sqrt{101})} + \ldots$$

$$+ \frac{\sqrt{102!}}{(1+\sqrt{103})(1+\sqrt{102})\ldots(1+\sqrt{2})}$$

cu 3 zecimale exacte.

G-L GH. BUICLIU

2378. — Să se arate că

$$(n-1)(n-2)\left[\frac{1}{2} + \frac{n-6}{2.3} + \frac{(n-3)(n-8)}{4.6} + \right.$$

$$\left. \frac{(n-3)(n-4)(n-10)}{5.24} + \cdots + \cdots - \frac{1}{n-1}\right] = 1.$$

IOAN BIRANAS

2379. — Să se rezolve ecuaţia

$$4p^3x^3 - 4p^3x^2 + p(ab + bc + ca)x - 2Rs = 0,$$

unde a, b, c, p, R, s sunt elementele cunoscute ale unui triunghiu oarecare A B C.

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

2380. — Să se determine A astfel ca expresia

$$E = \sqrt{\frac{x^3 + 3x^2}{5x - 1}} - Ax$$

să aibă pentru $x = \infty$ o limită finită şi bine determinată.

Să se găsească apoi această limită.

AL. TIGANOIU

2381. — Să se determine constantele a, b, λ astfel ca derivata funcţiei

$$y = \frac{ax^3 + b + 9\lambda}{x - 2} - 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{x+2}{x-2} + L\left(\frac{x^2+4}{x-2}\right)^{5\lambda}$$

să se anuleze pentru $x = -1$, $x = 0$ şi $x = 1$.

Să se afle toate rădăcinele derivatei, după ce în prealabil s'au înlocuit a, b, λ cu valorile găsite.

(L înseamnă logaritm neperian).

V. ALACI

2382. — Se dă semicercul A C B cu diametrul $\overline{AB} = 2R$ şi centrul O. Construim tangenta la semicerc paralelă cu diametrul A B şi fie C punctul de contact.

Pe această tangentă deoparte şi de alta a punctului C, luăm segmentele $\overline{CN}$ şi $\overline{CM}$ egale cu $\frac{1}{7}$ R, punctul N fiind de aceeaşi parte cu A faţă de OC.

Din N şi M ducem tangentele $\overline{NE}$ şi $\overline{MD}$ la semicercul (O), care prelungite întâlnesc tangentele în A şi B, la acelaşi semicerc, respectiv în P şi Q. (E şi D sunt punctele de contact ale tangentelor $\overline{NE}$ şi $\overline{MD}$).

1. Să se arate că: a) M N E D şi D E P Q sunt trapeze isoscele.

b) Raportul între perimetrul poligonului ABQMNP şi raza semicercului este comensurabil. Asemenea pentru perimetrele trapezelor M N E D şi D E P Q (Se va calcula valorile acestor trei rapoarte).

c) Raportul ariei poligonului A B Q M N P către aria patratului făcut pe rază este egal cu raportul razei către coarda de contact D E. Asemenea raportul ariei P N N Q către patratul razei este egal cu raportul tangentei $\overline{MN}$ către rază.

2 d) Să se calculeze volumul înăscut de aria cuprinsă între cele două contururi poligonale BQMNPA şi BDCEA, când se roteşte în jurul diametrului $\overline{AB}$ de o rotaţie complectă (360°)

e) Să se calculeze volumul înăscut de aria cuprinsă între semicerc şi conturul poligonal BQMNPA, când o rotim în jurul axei OC de 180°.

OVIDIU ŢINO

2383. — În triunghiul dreptunghic B A C, picioarele înălţimei şi bisectoarei din A pe B C sunt respectiv D şi E. Fie D_1 şi E_1 proecţiile acestora pe AB.

1°. Să se calculeze suprafaţa trapezului DD_1E_1A în funcţie de laturile triunghiului ABC.

2°. Să se arate că

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EB}^2}{\overline{EC}^2}.$$

CPT. G. P. BOERESCU

2384. — Să se arate că într'un triunghiu isoscel ABC (C = B), avem relaţia:

$$\frac{b^m \sin^p B \cos^r C - c^m \sin^p C \cos^r B}{b^n \sin^q B \cos^s C - c^n \sin^q C \cos^s B} =$$

$$\frac{(m - p + r)\cos^2 B - r}{(n - q + s)\cos^2 B - s} \cdot b^{m-n} \sin^{p-q} B \cos^{r-1} B.$$

VLADIMIR ZUBAC

2385. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare A B C, avem relaţia

$$Cp\frac{A}{2}\,Cp\frac{B}{2} - Cp\frac{B}{2}\,Cp\frac{C}{2} + Cp\frac{C}{2}\,Cp\frac{A}{2} =$$

$$2\left(Cp\frac{A}{2} - 1\right),$$

unde $Cp\,\alpha$ este cosecanta patratică a unghiului α.

PETRE IONESCU

ERATĂ. La pag. 94, coloana 2-a rândul B, în loc de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se va pune $\frac{\sqrt{b}}{2}$.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Armăutu Marin (2336, 2357, 2367, 2364). *Birănaş Ion* (2265, 2266, 2267, 2303, 2309, 2317, 2319, 2335, 2339, 2342, 2347, 2355, 2372, 2357, 2359, 2363; *Bogza Mihai* (2357, 2338, 2339, 2342, 2342, 2349, 2352, 2355, 2359, 2367; *Brasch Mihai* (2339, 2350, 2355, 2367, 2370, 2371); *Cârnaţiu Ion* (2133, 2202, 2303, 2305, 2323, 2342, 2331, 2339); *Coţiu Aurel* (2326, 2342, 2346, 2347, 2355; *Costin Alexandrina* (2305, 2347, 2368; *Fränkel David* (2339, 2345, 2373); *Giurcovici M.* (P; 2216, 2281, 2297, 2299, 2301, 2303, 2305, 2313, 2320; *Goldiş Gheorghe* (2282, 2325, 2338, 2370, 2371, 2373); *Gottard Francisk* 2221, 2247, 2263, 2325, 2331, 2347, 2365, 2367, 2368); *Grumăzesca M.* (N; P.); *Horoviţ Bernárd* (2224, 2338, 2370, 2371, 2375); *Nad D. Ioan* (2357, *Popa Vasile* (P; 2247, 2261, 2287, 2300, 2319, 2323, 2325, 2338, 2339, 2342, 2349, 2355, 2361, 2363, 2367, 2370, 2371); *Schiopu Ioan* (2350, 2355, 2371, 2375); *Sergiu Pali* (1989, 2261, 2293, 2338, 2339, 2350, 2363, 2366, 2367, 2370, 2371, *Rohrlich Alfred* (2370, 2371); *Sasu Ion* (2305, 2332, 2335, 2338, 2339, 2345, 2350, 2352, 2355, 2362, 2367); *Şerengău Mihai* (2135, 2229, 2293, 2335, 2339, 2342); *Stoian Anatol* (2.93, 2332, 2314, 2336, 2347, 2350, 1363, 2368); *Stern Tiberiu* (2312, 2338, 2355, 2371).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 300 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 3000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXV. IANUARIE 1946 No. 11.

SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREŢUL UNUI NUMAR 80 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 700 LEI PE AN.
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: FUNCTII TRIGONOMETRICE INVERSE CU ACEIASI DERIVATA.
2. NOTE MATEMATICE 26, 27.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 2290, 2312, 2332.
6. PROBLEME PROPUSE: 2381 - 2388.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXVI al „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA" este de 4000 (patru mii) lei.

Rugăm pe corespondenţii noştri a ne trimite din timp abonamentul pentru anul XXVI, al „R. M. T." care începe la 15 Martie 1946, de oarece numărul exemplarelor este redus.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul C E C No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXV, de 1000 (una mie) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 3000 lei fiecare.

ANUL XXV — NO. 11. TIMISOARA, IANUARIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 80 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 700 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

FUNCȚII TRIGONOMETRICE INVERSE CU ACEIAȘI DERIVATĂ

DE

V ALACI.

I

În toate tratatele de *Algebră superioară* și în multe reviste de matematici sunt propuse și rezolvate multe probleme de felul următor:

Dându se două funcții trigonometrice inverse de variabila x, să se afle derivatele lor și să se explice rezultatul.

De exemplu: *Dându-se funcțiile*

(1) $\qquad y = \arcsin Y, \quad z = \arccos Z,$

unde Y *și* Z *depind de variabila x, să se calculeze derivatele lor și să se explice rezultatul.*

Soluție. Se calculează derivatele lui y și z, se constată obicinuit că ele sunt egale și se conchide că funcțiile date diferă printr'o constantă. Se explică apoi rezultatul pe cale directă.

Observare. Funcțiile din (1) pot fi de altfel oricare din cele 6 funcții trigonometrice inverse cunoscute. În unele cazuri, membrul al 2-lea al uneia din funcțiile y și z poate fi înmulțit cu un coeficient numeric, de exemplu putem avea $z=2 \arccos Z$.

II.

Scopul urmărit de acest articol este de a determina una dintre funcțiile Y și Z când cealaltă este cunoscută, cu alte cuvinte de a arăta cum se pot construi și formula oricâte probleme de felul celei enunțate mai sus, fiindcă așa cum ele se întâlnesc până acum, par întâmplătoare.

Din expunerea ce o vom face va rezulta ceva mai mult, va rezulta chiar o metodă elementară nouă de a rezolva astfel de probleme.

[1]) Comunicare făcută la Societatea Științifică a Politechnicei Timișoara, în 6 Decemvrie 1945.

Pentru aceasta vom soluționa un număr suficient de probleme, din care să rezulte clar afirmațiile noastre.

Problema 1-a *Se dau funcțiile*

(2) $\qquad y = \arcsin Y, \quad z = \arcsin Z,$

unde Y *și* Z *depind de variabila x. Cunoscând funcția* Y, *să se determine forma generală a lui* Z *astfel ca derivatele funcțiilor din* (2) *să fie egale.*

Soluție, Derivatele funcțiilor din (2) trebuind să fie egale, rezultă

$$z = y \pm C \quad (C \text{ un arc real constant oarecare}).$$

Luând sinusul în ambii membri, avem

(3) $\qquad \sin z = \sin y \cos C \pm \sin C \cos y.$

Cum din (2) rezultă

$$\sin z = Z, \quad \sin y = Y, \quad \text{deci} \quad \cos y = \pm \sqrt{1 - Y^2},$$

apoi notând $\sin C = k$,

deci $\qquad \cos C = \pm \sqrt{1-k^2}, \ (-1 \leq k \leq 1),$

relația (3) ne dă

(A) $\qquad \boxed{Z = \pm Y \sqrt{1-k^2} \pm k \sqrt{1 - Y^2}},$

unde înaintea radicalilor trebuesc luate semne potrivite, după cadranele în care variază y și z.

Observare. Dacă presupunem arcul C imaginar, atunci k este în afara intervalului $(-1, 1)$.

Cazuri particulare. 1°. Dacă luăm $Y=x$, atunci formula (A) devine

$$Z = \pm x \sqrt{1-k^2} \pm k \sqrt{1-x^2},$$

prin urmare: *Funcțiile:*

(4) $y = \arcsin x, \ z = \arcsin(\pm x\sqrt{1-k^2} \pm k\sqrt{1-x^2})$.

au aceiași derivată.

Direct, faptul se explică, observând că din (4) rezultă

$x = \sin y$, $\sin z = \pm x\sqrt{1-k^2} \pm k\sqrt{1-x^2}$

şi punând $k = \sin C$, urmează

$\sin z = \sin y \cos C \pm \sin C \cos y = \sin(y \pm C)$,

deci $z = y \pm C$.

2°. Dacă în formula (A) luăm $Y = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$ şi $k = 1$, obţinem luând $+$ în faţa radicalului

$$Z = \sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}},$$

prin urmare: *Funcţiile*:

$$y = \arcsin\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}, \quad z = \arcsin\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}}$$

au aceiaşi derivată.

Avem astfel sub o formă echivalentă problema 402 din „*Suplimentul Gazetei Matematice*“, Vol. V, p. 129.

Problema 2-a. *Se dau funcţiile*

(5) $y = \arcsin Y, \quad z = 2\arcsin Z,$

unde Y *şi* Z *depind de* x. *Cunoscând funcţia* Y, *să se determine* Z *astfel ca funcţiile* y *şi* z *să aibă aceiaşi derivată.*

Soluţie. Derivatele funcţiilor din (5) trebuind să fie egale, rezultă

$$y - z = \pm C, \quad (C \text{ un arc real constant}).$$

Luând sinusul în ambii membri şi notând $\sin C = k$, $(-1 \leq k \leq 1)$, avem

(6) $\sin y \cos z - \sin z \cos y = \pm k.$

Din (5) deducem

$$\sin y = Y, \quad \sin\frac{z}{2} = Z,$$

deci

$$\cos y = \pm\sqrt{1-Y^2}, \quad \cos\frac{z}{2} = \pm\sqrt{1-Z^2},$$

(înaintea radicalilor luându-se semn convenabil), iar mai departe rezultă

$$\sin z = \pm 2Z\sqrt{1-Z^2},$$

$$\cos z = 1 - 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - 2Z^2.$$

În virtutea acestor relaţii, (6) devine

$$Y(1-2Z^2) \mp k = \pm 2Z\sqrt{(1-Y^2)(1-Z^2)},$$

de unde prin ridicarea la patrat, obţinem

$$4Z^2(1-Y^2)(1-Z^2) =$$

$$Y^2(1-2Z^2)^2 \mp 2kY(1-2Z^2) + k^2,$$

sau

$$4Z^4 - 4(1 \mp kY)Z^2 + (k \mp Y)^2 = 0.$$

De aci deducem

$$Z = \frac{\pm\sqrt{2(1 \mp kY) \pm \sqrt{4(1 \mp kY)^2 - 4(k \mp Y)^2}}}{2},$$

sau

(B) $$\boxed{Z = \frac{\pm\sqrt{1 \mp kY \pm \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}}{\sqrt{2}}}.$$

Cazuri particulare. 1°. Pentru $Y = 2x\sqrt{1-x^2}$ şi $k = 0$, formula (B) ne dă

$$Z = \frac{\pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}}{\sqrt{2}} = \frac{\pm\sqrt{1 \pm (1-2x^2)}}{\sqrt{2}}.$$

Luând $+$ în faţa radicalului şi $-$ sub radical, găsim

$$Z = x.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile,*

$$y = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}, \quad z = 2\arcsin x,$$

au aceiaşi derivată.

Avem astfel problema 30, Cap. VII din „Culegere de Probleme“ de *Gh. Ioachimescu.*

2°. Pentru $Y = 2(\sqrt{x}-1)\sqrt{2\sqrt{x}-x}$ şi $k = 0$, formula (B) în care luăm $+$ înaintea ambilor radicali, ne dă

$$Z = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-4(x-2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-x)}}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4(2\sqrt{x}-x)^2-4(2\sqrt{x}-1)}}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{1+1-2(2\sqrt{x}-x)}}{\sqrt{2}} = \sqrt{1-2\sqrt{x}+x} = \sqrt{x}-1.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y = \arcsin 2(\sqrt{x}-1)\sqrt{2\sqrt{x}-x},$$

$$z = 2\arcsin(\sqrt{x}-1),$$

au aceiaşi derivată.

Avem astfel problema 573 din „*Suplimentul Gazetei Matematice*“, Vol. VII, p. 149.

Problema 3-a. *Se dau funcţiile*

(7) $\qquad y = \arcsin Y, \quad z = \arccos Z,$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x.

Cunoscând funcţia Y, *să se determine* Z *astfel ca derivatele funcţiilor* (7) *să fie egale.*

Soluţie. Funcţiile (7) trebuind să aibă aceiaşi derivată, rezultă

$z = y \pm C$, (C un arc real constant oarecare).

Luând cosinusul în ambii membrii, avem

(8) $\qquad \cos z = \cos y \cos C \mp \sin y \sin C.$

Cum din (7) rezultă

$\cos z = Z, \quad \sin y = Y, \quad$ deci $\quad \cos y = \pm\sqrt{1-Y^2},$

apoi notând $\sin C = k$,

deci $\qquad \cos C = \pm\sqrt{1-k^2}, \quad (-1 \leq k \leq 1),$

relaţia (8) ne dă

(C) $\qquad \boxed{Z = \mp k Y \pm \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}.$

Altă soluţie. Relaţia 2-a din (7) ne dă

$$\cos z = Z, \quad \text{sau} \quad 1 - 2\sin^2\frac{z}{2} = Z,$$

de unde

$$\sin\frac{z}{2} = \frac{\pm\sqrt{1-Z}}{\sqrt{2}},$$

şi atunci rezultă

$$z = 2\arcsin\frac{\pm\sqrt{1-Z}}{\sqrt{2}}.$$

Acum problema revine: A *determina* Z *în funcţie de* Y, *astfel ca funcţiile*

$$y = \sin Y, \quad z = 2\arcsin\frac{\pm\sqrt{1-Z}}{\sqrt{2}}$$

să aibă aceiaşi derivată.

Am redus astfel chestiunea la problema 2-a şi conform formulei (B), avem

$$\frac{\pm\sqrt{1-Z}}{\sqrt{2}} = \frac{\pm\sqrt{1 \mp kY \pm \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}}{\sqrt{2}}.$$

De aci deducem

$$Z = \pm k Y \mp \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}$$

analoagă ca formula găsită (C), dacă luăm semne potrivite.

Cazuri particulare 1°. Pentru $Y = \frac{(x-\sqrt{1-x^2})^2}{2x^2-1}$ şi $k = 0$, formula (C) în care luăm $+$ înaintea radicalului, ne dă

$$Z = \sqrt{1 - \frac{(x-\sqrt{1-x^2})^4}{(2x^2-1)^2}} = \frac{\sqrt{(2x^2-1)^2 - (1-2x\sqrt{1-x^2})^2}}{2x^2-1} = \frac{\sqrt{(2x^2-1+1-2x\sqrt{1-x^2})(2x^2-1-1-2x\sqrt{1-x^2})}}{2x^2-1}$$

$$= \frac{\sqrt{4x(x-\sqrt{1-x^2})(x^2-1+x\sqrt{1-x^2})}}{2x^2-1} = \frac{2\sqrt{x(x-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}(x-\sqrt{1-x^2})}}{2x^2-1}$$

$$= \frac{2(x-\sqrt{1-x^2})\sqrt{x\sqrt{1-x^2}}}{2x^2-1} = \frac{2(2x^2-1)\sqrt{x\sqrt{1-x^2}}}{(2x^2-1)(x+\sqrt{1-x^2})} = \frac{2\sqrt{x\sqrt{1-x^2}}}{x+\sqrt{1-x^2}}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y = \arcsin\frac{(x-\sqrt{1-x^2})^2}{2x^2-1}, \qquad z = \arccos\frac{2\sqrt{x\sqrt{1-x^2}}}{x+\sqrt{1-x^2}},$$

au aceiaşi derivată.

Avem astfel problema 334 din „*Suplimentul Gazetei Matematice*“, Vol. IV, p. 186.

2°. Pentru $Y = x\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-x^2}$ şi $k = 0$, formula (C), în care luăm $+$ înaintea radicalului, ne dă

$$Z = \sqrt{1 - (x\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{1-x^2-a^2+2a^2x^2-2ax\sqrt{(1-a^2)(1-x^2)}}$$

$$= \sqrt{a^2x^2 + (1-a^2)(1-x^2) - 2ax\sqrt{(1-a^2)(1-x^2)}} = ax - \sqrt{(1-a^2)(1-x^2)}.$$

Putem deci enunța: *Funcțiile*

$$y = \arcsin\left(x\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-x^2}\right), \qquad z = \arccos\left[ax - \sqrt{(1-a^2)(1-x^2)}\right],$$

au aceiași derivată.

Avem astfel problema 276 din revista „*Pitagora*“, Vol. V, p. 26.

3°. Pentru $Y = \dfrac{2(x^2+3x+2)}{2x^2+6x+5}$ și $k=0$, formula (C) în care luăm $+$ înaintea radicalului, ne dă

$$Z = \sqrt{1 - \frac{(2x^2+6x+4)^2}{(2x^2+6x+5)^2}} = \frac{\sqrt{(2x^2+6x+4)^2 - (2x^2+6x+4)^2}}{2x^2+6x+5} = \frac{\sqrt{4x^2+12x+9}}{2x^2+6x+5} = \frac{2x+3}{2x^2+6x+5}$$

Putem deci enunța: *Funcțiile*

$$y = \arcsin\frac{2(x^2+3x+2)}{2x^2+6x+5}, \qquad z = \arccos\frac{2x+3}{2x^2+6x+5}$$

au aceiași derivată.

Avem astfel problema 120 din revista „*Pitagora*“, Vol. II, p. 166.

Problema 4-a. *Se dau funcțiile*

(9) $\qquad y = \arcsin Y, \quad z = 2\arccos Z,$

unde Y *și* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând funcția* Y, *se cere* Z *astfel ca funcțiile* y *și* z *să aibă aceiași derivată.*

Prima soluție. Derivatele funcțiilor din (9) trebuind să fie egale, rezultă

$$y - z = C, \quad (C \text{ un arc real constant oarecare}).$$

Luând sinusul în ambii membri și notând $\sin C = k$, $(-1 \leq k \leq 1)$, avem

(10) $\qquad \sin y \cos z - \sin z \cos y = k.$

Dar din (9) deducem

$$\sin y = Y, \qquad \cos\frac{z}{2} = Z, \quad \text{deci}$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1-Y^2}, \quad \sin\frac{z}{2} = \pm\sqrt{1-Z^2},$$

(unde în fața radicalilor se vor lua semne potrivite) și prin urmare

$$\sin z = \pm 2Z\sqrt{1-Z^2},$$

$$\cos z = 2\cos^2\frac{z}{2} - 1 = 2Z^2 - 1.$$

În virtutea acestor relații, (10) devine

$$Y(2Z^2-1) - k = \pm 2Z\sqrt{(1-Y^2)(1-Z^2)},$$

sau

$$Y^2(4Z^4 - 4Z^2 + 1) - 2kY(2Z^2-1) + k^2 = 4Z^2(1 - Y^2 - Z^2 + Y^2Z^2).$$

Simplificând, avem

$$4Z^4 - 4(1+kY)Z^2 + (k+Y)^2 = 0.$$

De aci deducem

$$Z = \frac{\pm\sqrt{2(1+kY) \pm 2\sqrt{(1+kY)^2 - (k+Y)^2}}}{2},$$

sau

(D) $$\boxed{Z = \frac{\pm\sqrt{1+kY \pm \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}}{\sqrt{2}}}.$$

Soluția 2-a. Relația 2-a din (9) ne dă

$$\cos\frac{z}{2} = Z, \quad \text{deci} \quad \sin\frac{z}{2} = \pm\sqrt{1-Z^2},$$

și atunci

(11) $\qquad z = 2\arcsin\left(\pm\sqrt{1-Z^2}\right).$

Funcția 2-a din (9) se poate înlocui astfel prin (11).

Problema dată s'a redus astfel la următoarea:

Dându-se funcțiile

(12) $\qquad y = \arcsin Y, \quad z = \arcsin\left(\pm\sqrt{1-Z^2}\right),$

unde Y *și* Z *depind de variabila* x, *să se determine* Z *astfel ca funcțiile din* (12) *să admită aceiași derivată.*

Dar aceasta este tocmai *problema 2-a*, a cărei soluție conform formulei (B) este

$$\pm\sqrt{1-Z^2} = \frac{\pm\sqrt{1 \mp kY \pm \sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}}{\sqrt{2}},$$

de unde rezultă,

(D) $$\boxed{Z=\frac{\pm\sqrt{1\pm kY\mp\sqrt{(1-k^2)(1-Y^2)}}}{\sqrt{2}}},$$

valoare analoagă cu aceea din prima soluţie. Semnele, acolo unde sunt duble, trebuesc luate convenabil.

Cazuri particulare. 1°. Pentru $Y=x$ şi $k=0$ formula (D) ne dă

$$Z=\frac{\pm\sqrt{1\mp\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{2}}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y=\arcsin x,\quad z=2\arccos\frac{\pm\sqrt{1\mp\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{2}}$$

au aceiaşi derivată.

2°. Pentru $Y=x$ şi $k=1$ formula (D) ne dă

$$Z=\frac{\pm\sqrt{1\mp x}}{\sqrt{2}}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y=\arcsin x,\quad z=2\arccos\frac{\pm\sqrt{1\mp x}}{\sqrt{2}}$$

au aceiaşi derivată.

3°. Pentru $Y=x$ şi $k=\frac{1}{2}$ formula (D) ne dă

$$Z=\frac{\pm\sqrt{2\pm x\mp\sqrt{3(1-x^2)}}}{2}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$y=\arcsin x,\quad z=2\arccos\frac{\pm\sqrt{2\pm x\mp\sqrt{3(1-x^2)}}}{2}.$$

au aceiaşi derivată.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

26 — *Progresii geometrice derivate.*

În cele ce urmează, vom considera o progresie geometrică de raţie q. Făcând diferenţa între termenul al doilea şi primul, al treilea şi al doilea etc., se obţine o nouă progresie geometrică de aceeaş raţie q; aplicând aceeaş operaţie termenilor progresiei rezultate şi continuând procedeul, se obţin un şir de progresii geometrice, care se bucură de frumoase proprietăţi.

Le-am numit *progresii derivate.*

Fie deci

(1) $$\div a_1^{(1)},\ a_1^{(2)},\ a_1^{(3)},\ \ldots,\ a_1^{(k)},\ \ldots,\ a_1^{(n)}$$

o progresie geometrică de raţie q.

Un termen oarecare al său, e dat de formula cunoscută

(2) $$a_1^{(n)}=a_1^{(1)}q^{n-1}.$$

Calculând diferenţele

$$a_1^{(2)}-a_1^{(1)}=a_2^{(1)},\ a_1^{(3)}-a_1^{(2)}=a_2^{(2)},\ \ldots,\ a_1^{(k)}-a_1^{(k-1)}=a_2^{(k-1)},\ \ldots$$

se obţin nişte numere

$$\div a_2^{(1)},\ a_2^{(2)},\ \ldots,\ a_2^{(k)},\ \ldots,\ a_2^{(n)},$$

care formează o nouă progresie geometrică de aceeaşi raţie ca (1); într'adevăr, avem

$$a_2^{(k-1)}=a_2^{(k)}-a_1^{(k-1)}=a_1^{(1)}.\,q^{k-2}.(q-1)$$

şi la fel deducem

(3) $$a_2^{(k)}=a_1^{(1)}q^{k-1}(q-1).$$

Raportul acestor doi termeni este q, raţia progresiei.

Progresia al cărui termen general e dat de relaţia (3), poartă numele de *progresia derivată* a progresiei (1).

Analog, diferenţele

$$a_2^{(2)}-a_2^{(1)}=a_3^{(1)},\ a_2^{(3)}-a_2^{(2)}=a_3^{(2)},\ \ldots,\ a_2^{(k)}-a_2^{(k-1)}=a_3^{(k-1)},\ \ldots$$

constituesc o progresie geometrică

$$\div a_3^{(1)},\ a_3^{(2)},\ \ldots,\ a_3^{(k)},\ \ldots$$

al cărei termen general este după (3):

$$a_3^{(k-1)}=a_2^{(k)}-a_2^{(k-1)}=a_1^{(1)}q^{k-2}.(q-1)^2,$$

sau

(4) $$a_3^{(k)}=a_1^{(1)}.q^{k-1}.(q-1)^2.$$

Progresia cu termenul general (4), este *progresia de ivată de ordinul doi* a progresiei (1).

Urmând acelaş procedeu, vom avea:

$$a_p^{(1)}=a_{p-1}^{(2)}-a_{p-1}^{(1)},\ \ldots,\ a_p^{(k-1)}=a_{p-1}^{(k)}-a_{p-1}^{(k-1)},\ \ldots$$

unde

(5) $$a_p^{(k)}=a_1^{(1)}.q^{k-1}.(q-1)^{p-1}$$

este termenul general al progresiei derivate de ordinul $p-1$.

În cazul când $p=1$, relația (5) devine

$$a_1^{(k)}=a_1^{(1)}\,q^{k-1}$$

și aceasta este chiar relația (2), care ne dă termenul general al progresiei dela care am pornit.

Calculând după relația (5) termenii unei progresii geometrice și aceia ai progresiei derivate — dând lui p și k valorile $1, 2, \ldots$ — obținem tabloul:

$a_1^{(1)}$	$a_1^{(2)}$	$a_1^{(3)}$	$\ldots$	$a_1^{(k)}$	$\ldots$	$a_1^{(n-2)}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_1^{(n)}$	$a_1^{(k)}=a_1^{(1)}\cdot q^{k-1}$
$a_2^{(1)}$	$a_2^{(2)}$	$a_2^{(3)}$	$\ldots$	$a_2^{(k)}$	$\ldots$	$a_2^{(n-2)}$	$a_2^{(n-1)}$		
$a_3^{(1)}$	$a_3^{(2)}$	$a_3^{(3)}$	$\ldots$	$a_3^{(k)}$	$\ldots$	$a_3^{(n-2)}$			
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$				
$a_p^{(1)}$	$a_p^{(2)}$	$a_p^{(3)}$	$\ldots$	$a_p^{(k)}$					$a_p^{(k)}=a_1^{(1)}\cdot q^{k-1}\cdot(q-1)^{p-1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$						
$a_{n-2}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(3)}$							
$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-1}^{(2)}$								
$a_n^{(1)}$									

$$a_p^1=a_1^{(1)}\cdot(q-1)^{p-1}.$$

Proprietăți. Privind acest tablou, observăm:

1°. Produsul termenilor extremi și ai celor egali depărtați de extremi este constant pe o aceeaș linie sau coloană

$$a_n^{(1)}\cdot a_1^{(1)}=a_{n-1}^{(1)}\cdot a_2^{(1)},\ \text{sau}\ a_2^{(n-1)}\cdot a_2^{(1)}=a_2^{(n-2)}\cdot a_2^{(2)}\ \text{etc.}$$

2°. Un termen oarecare din tablou este egal cu cel dela stânga sa plus cel de sub acesta

$$a_p^{(k)}=a_p^{(k-1)}+a_{p+1}^{(k-1)}.$$

3°. Un termen oarecare este egal cu suma termenilor ce constitue pătratul de deasupra sa, având ca latură câte doi termeni

$$a_{p+2}^{(k+1)}=a_p^{(k)}+a_p^{(k+1)}+a_{p+1}^{(k)}+a_{p+1}^{(k+1)}.$$

4°. Diferența dintre ultimul termen al unei coloane și suma termenilor de deasupra sa, este egal cu numărul din capătul coloanei

$$a_{n-p-1}^{(k)}-\sum_{k=1}a_{n-p}^{(k)}=a_1^{(k)}.$$

Formula de însumare. Însumarea progresiilor obținute, se poate face pe linii sau pe coloane.

1°. *Însumarea pe linii.* Notând cu S_p suma liniei de ordinul $p\,(p=1,2,\ldots)$, adică a progresiei derivate de ordinul $p-1$, avem

$$(6)\qquad \boxed{S_p=a_1^{(1)}(q-1)^{p-1}\cdot\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}},\quad p=1,2,\ldots,n).$$

Dând lui p valorile $1, 2, \ldots, n$ și însumând, obținem formula care ne dă suma întregului tablou

$$(7)\qquad \boxed{S=\frac{a_1^{(1)}}{1-q}\left\{\frac{1-(q-1)^n}{2-q}-q\,[q^n-(q-1)^n]\right\}}.$$

2°. *Însumarea pe coloane.* Notând cu $S^{(p)}$ suma coloanei de ordinul p, avem:

$$(8)\qquad \boxed{S^{(p)}=a_1^{(1)}q^{p-1}\frac{1-(q-1)^{n-p+1}}{2-q}}.$$

Dând toate valorile lui p și făcând însumarea, obținem o nouă formulă care ne dă suma întregului tablou

$$(9)\qquad \boxed{S=\frac{a_1^{(1)}}{2-q}\left\{\frac{1-q^n}{1-q}-(q-1)\,[q^n-(q-1)^n]\right\}}.$$

Observare. În cazul $q=1$ și $q=2$, formulele pentru însumare se prezintă sub forma nedeterminată $\frac{0}{0}$; adevăratele valori se obțin aplicând regula lui *l'Hôspital.*

Aplicaţie. În cazul simplu $a_1^{(1)}=2$, $q=3$ şi $n=6$, se obţine tabloul:

2	6	18	54	162	486
4	12	36	108	324	
8	24	72	216		
16	48	144			
32	96				
64					

Proprietăţile găsite înclusiv formulele, se pot verifica pe acest tablou.

Pentru însumare, avem

$$S_1=728;\quad S_2=484;\quad S_3=320;$$
$$S_4=208;\quad S_5=128;\quad S_6=64.$$

$$S^{(1)}=126;\quad S^{(2)}=186;\quad S^{(3)}=270;$$
$$S^{(4)}=378;\quad S^{(5)}=486;\quad S^{(6)}=486.$$

$$S=\sum_{k=1}^{6}S_k=\sum_{k=1}^{6}S^{(k)}=1932.$$

FLORIAN GOGA

---

27. — *Calcularea valorii numerice a unei funcţiuni lineare de rădăcinile unui sistem de ecuaţii, deasemeni lineare.*

Fiind dat sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=A_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=A_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=A_n \end{cases}$$

ne propunem ca fără a-l rezolva, să găsim valoarea expresiunii

$$E=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n+M,$$

unde M este un număr dat.

Alăturând această ecuaţie celor n precedente, se obţine un sistem de $n+1$ ecuaţii cu n necunoscute, *compatibil* şi deci rezultă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & A_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & A_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & A_n\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n & E-M \end{vmatrix}=0.$$

Această ecuaţie scrisă sub formă de determinant, ne procură valoarea lui E.

Aplicaţii. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei

$$E=x+2y+3z+4$$

ştiind că x, y, z satisfac sistemul

$$\begin{cases} x-2y-2z=-21,\\ 2x+4y+z=41,\\ 3x+y+z=18. \end{cases}$$

Scriem imediat

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -21\\ 2 & 4 & 1 & 41\\ 3 & 1 & 1 & 28\\ 1 & 2 & 3 & E-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 8 & 5 & 83\\ 3 & 7 & 7 & 91\\ 1 & 4 & 5 & E+17 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 & -21\\ 7 & 0 & 0\\ 4 & 1 & E-35 \end{vmatrix}=-7(-3E+105+21)=0,$$

$$E=42.$$

VIRGIL GHITESCU

POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA

CHESTIUNI PROPUSE LA AL 2-lea EXAMEN DE INTRARE,
Decemvrie 1945.

GEOMETRIE.

I.

Fie cercul (O) cu centrul O şi raza R. Ducem diametrul $\overline{AB}$ şi fie I mijlocul semicercului AIB. Pe raza $\overline{OI}$ măsurăm segmentul $\overline{OE}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}R$ $(m>n)$; iar prin E ducem o paralelă la AB, care taie cercul (O) în C şi D. În punctele C şi D ducem tangentele la cercul (O), care sunt întâlnite de tangentele în A şi B respectiv în P şi Q, iar de tangenta în I în M şi N.

1. Să se determine: a) Coordonatele vârfurilor conturului APMNQB.

b) Lungimea conturului APMNQB.

2. Să se arate, că: a) Raportul lungimii conturului APMNQB către raza R este comensurabil, când m şi n sunt numere întregi.

b) Dacă raportul $\frac{m}{n}$ este comensurabil, punctele A, E, N nu sunt pe aceeaşi dreaptă.

Axele de coordonate vor fi alese convenabil.

II.

Într'un cerc (O), cu centrul O şi raza R, ducem diametrul AB şi raza $\overline{OC}$ perpendiculară pe acest diametru. Prin

mijlocul M al razei $\overline{OC}$ ducem o coardă $\overline{DE}$ paralelă cu AB. Pe raza $\overline{OC}$ măsurăm segmentul $\overline{OH}$ egal cu $\overline{DM}$, iar prin H ducem coarda $\overline{FG}$ paralelă cu AB. Să se calculeze:

a) Suprafaţă înăscută din rotirea conturului DEGFD în jurul axei AB.

b) Volumul solidului înăscut din rotirea ariei DEGF în jurul axei OD.

III.

Pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ale patratului ABCD se iau în acelaşi sens segmentele egale $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$. Să se arate, că:

a) Cercurile D'AA', A'BB', B'CC', C'DD' trec prin acelaşi punct I.

b) Dacă M este punctul unde diagonala BD taie cercul D'AA', arcul A'M este egal cu arcul AD'.

c) Dacă M' este punctul unde diagonala BD taie a doua oară cercul B'CC', iar L şi L' punctele unde diagonala AC taie a doua oară respectiv cercurile A'BB' şi C'DD' patrulaterul LML'M' este un patrat.

(11 Decemvrie, orele 8—11).

ALGEBRĂ.

I.

1° Să se arate că funcţiile

$$y = \sqrt{(x-b)(a-x)} + \arcsin\frac{2x-a-b}{a-b},$$

$$z = \sqrt{(x-b)(a-x)} + 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

au aceiaşi derivată. (a şi b sunt constante).

2° Să se determine constantele a şi b astfel ca derivata aflată să fie nulă pentru $x=1$ şi să ia valoarea

$$-\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ pentru } x=3.$$

II.

Să se determine toate valorile lui A astfel ca expresia

$$\sqrt[3]{64x^3+x^2+1} - Ax$$

să aibă o limită finită pentru $x=\infty$ şi apoi să se găsească această limită.

III.

Să se determine a şi b astfel ca ecuaţia

$$x^4 - (a+b)x^3 + 5x^2 + (a^2+b^2-2)x - 36 = 0$$

să aibă o rădăcină dublă şi celelalte două rădăcini egale şi de semne contrare.

(11 Decemvrie, orele 15—18).

TRIGONOMETRIE.

1. Dintr'un punct dat P, situat pe prelungirea diametrului AB al unui cerc O, de rază R, se duce secanta PCD la cerc. Să se determine unghiul secantei cu diametrul, astfel încât aria triunghiului OCP să aibă o valoare dată k^2. Discuţie. Se va lua $OP = a$. Când aria este maximă?

2. Să se arate că

$$\sin(2a+x)+\sin(2b+x)+\sin(2c+x)-\sin(2a+2b+2c+3x) = 4\sin(a+b+x)\sin(b+c+x)\sin(c+a+x).$$

3. Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, cunoscând latura $BC = a$, bisectoarea interioară a unghiului opus, $AA' = \alpha$, precum şi unghiul φ, pe care-l face această bisectoare cu latura opusă BC. Discuţie. Când triunghiul este dreptunghic în A?

(12 Decemvrie, orele 8—11).

CHESTIUNI DE ORAL

GEOMETRIE.

I.

Să consideră un triunghiu ABC având unghiul din A de 90°. Pe laturile AB, AC se construiesc în exterior triunghiuri dreptunghice isoscele ABD şi ACE având aceste laturi ca ipotenuse. Se cere să se demonstreze că:

1. punctele D, A, E sunt colineare;

2. dreptele BD şi EC sunt paralele;

3. bisectoarele unghiurilor D şi E împreună cu BC sunt trei drepte concurente.

II.

Fie $AB = a$ un segment dat. În A şi B se ridică de aceiaşi parte a lui AB perpendicularele $AC=b$ şi $BD=a+b$. Să se găsească volumul născut din rotaţia trapezului ABDC în jurul laturei CD.

III.

Pe axa Ox se iau punctele fixe $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ şi un punct variabil $B(\alpha,0)$ între A şi A'. Pe AB şi A'B ca laturi se construiesc deasupra lui Ox triunghiuri echilaterale ABM şi A'BN. Se cere:

1. Coordonatele punctelor M şi N.

2. Să se scrie ecuaţiile cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM şi A'BN.

3. Să se demonstreze că suma razelor acestor cercuri este constantă când B variază.

4. Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului MN.

(12 Decemvrie, orele 15—18).

ALGEBRĂ.

I.

Să se facă raţional numitorul fracţiei:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

II.

Intr'o progresie geometrică, primul termen adunat cu termenul al cincilea ne dau o sumă egală cu 5, iar termenul al treilea este egal cu 2. Să se afle primul termen şi raţia. Să se scrie apoi primii cinci termeni din progresie. (Se va nota primul termen cu x şi raţia cu y.

III.

Să se calculeze limita expresiei:

$$\frac{(1+x)^x - 1}{\sin x}$$

când $x \to \infty$.

IV.

Se dă funcţiunea:

$$y = \frac{2x - \alpha}{2x^2 + 2x - 1 - \alpha^2}$$

α fiind o constantă, reală. Să se arate că funcţiunea nu are nici maxim, nici minim, oricare ar fi valoarea parametrului a.

V.

Se consideră un triunghiu isoscel ABC înscris într'un cerc de rază R (avem AB = AC). Dintre toate triunghiurile isoscele, înscrise în acest cerc, să se detrermine acela care are suprafaţa maximă. (Fie O centrul cercului şi OM perpendiculara scoborâtă din O pe BC. Se va nota $BC = 2x$ şi $OM = y$ şi se va determina x şi y astfel ca suprafaţa să fie maximă).

VI.

Să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$$

ştiind că are rădăcini multiple.

(13 Decemvrie, orele 8–11).

TRIGONOMETRIE.

1. In figura formată dintr'un cerc, o rază OB, o coardă BC şi segmentul OA, A pe CB, avem cunoscute elementele:

$$\overline{OB} = R, \quad \overset{\frown}{OAB} = \alpha, \quad \overline{OA} = a.$$

Să se calculeze în funcţie de acestea:

$$\overline{AC}, \quad \overline{AB}, \text{ cât şi } \sphericalangle \overset{\frown}{AOB} = \hat{O}.$$

Să se determine α aşa fel ca

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}.$$

2. In triunghiul dreptunghic ABC în care $\hat{A} = 90^0$ se cunoaşte $\overline{AC} = b$ şi $\hat{B}$. Se cere să se calculeze în funcţie de acestea r = raza cercului înscris şi R = raza cercului circumscris triunghiului.

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 2.$$

4. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E = \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta).$$

5. Fiind dat un triunghiu ABC cu laturile a, b, c şi $\hat{A}$, $\hat{B}$ şi $\hat{C}$, să se arate că unghiurile ascuţite $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ determina de ecuaţiile:

$$\cos x = \frac{a}{b+c}; \quad \cos y = \frac{b}{a+c}; \quad \cos z = \frac{c}{a+b},$$

satisfac relaţiile:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

(13 Decemvrie, orele 15—18).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LI, No. 4, Decemvrie 1945. Problema 5667, de *Şerban Gheorghiu*. Compunerea vectorilor, de *M. Ghermănescu*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Disquisitiones Mathematicae et Physicae*, Tomes IV, Fasc. 1—4, 1945.

Quelques problèmes relatifs à une formule de récurrence, par *D. V. Ionescu*. Sur le problème des singularités des fonctions analytiques, par *Georges Călugăreanu*. Équations aux dérivées partielles et objets géométriques, par *N. Théodoresco*. Sur un problème d'existence des espaces non holonomes A_n^m totalement géodésiques, dans un espace A_n à connexion affine symétriques, par *St. Petrescu*. Sur certaines transformations asymtotiques, par *Gh. Th. Gheorghiu*. Contributions à la Cinématique des systèmes rigides d'un espace euclidien à quatre dimensions, par *Rudolf Woinaroski*.

3. *Gh. Th. Georghiu*. Sur les transformations asymtotique. (Extrait du „Bulletin des Sciences Mathematique, Paris 1945).

4. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur les quartiques à point triple à tangentes distinctes et sur les courbes planes en général. (Extrait du Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara, T. 12, Fasc. 1—2).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2290. — *Să se determine toate valorile lui m şi n reale sau imaginare, astfel ca ecuaţia*

$$x^4 - mx^3 + 5x^2 + 4mx + n^3 = 63$$

să aibă o rădăcină dublă şi două rădăcini egale şi de semne contrare. V. ALACI

Soluţie. Fie a rădăcina dublă, b şi $-b$ celelalte două rădăcini. Rezultă de aci că

$$x^4 - mx^3 + 5x^2 + 4mx + n^3 - 63 =$$

$$(x-a)^2(x-b)(x+b) = (x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - b^2) =$$

$$x^4 - 2ax^3 + (a^2 - b^2)x^2 + 2ab^2x - a^2b^2.$$

Din identificarea coeficienţilor termenilor asemeni, deducem

$$(1) \quad \begin{cases} 2a = m \\ a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab^2 = 4m \\ -a^2b^2 = n^3 - 63. \end{cases}$$

Primele două relaţii ne dau

$$\begin{cases} a = \dfrac{m}{2} \\ \\ b^2 = \dfrac{m^2}{4} - 5. \end{cases}$$

Înlocuind aceste valori în ultimele două relaţii din (1), găsim

$$(2)\qquad \begin{cases} m\left(\frac{m^2}{4}-5\right)=4m \\ -\frac{m^2}{4}\left(\frac{m^2}{4}-5\right)=n^3-63. \end{cases}$$

Prima relaţie din (2) ne dă

$m_1=0$ şi $m^2=36$, deci $m_2=6$, $m_3=-6$.

Pentru $m=0$, a 2-a ecuaţie din (2) ne dă

$$n^3-63=0,$$

sau

$$(n-\sqrt[3]{63})(n^2+\sqrt[3]{63}\,n+\sqrt[3]{63^2})=0,$$

deci

$$n_1=\sqrt[3]{63} \quad \text{şi} \quad n_{2,3}=\sqrt[3]{63}\cdot\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

iar pentru $m=\pm 6$, ecuaţia 2-a din (2), devine

$$-9(9-5)=n^3-63, \quad \text{sau} \quad n^3-27=0,$$

de unde

$$n_4=3, \quad n_{5,6}=3\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Astfel perechile de valori m şi n pentru care ecuaţia dată admite o rădăcină dublă şi două rădăcini egale şi de semne contrare sunt:

1^0. $m=0$, $n=\sqrt[3]{63}$, sau $n=\sqrt[3]{63}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

2^0. $m=6$, $n=3$, sau $n=3\cdot\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

3^0. $m=-6$, $n=3$, sau $n=3\cdot\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

Au dat bune soluţii d-nii: *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Birănaş Ioan* (Polit., Timişoara), *Bogza Mihai* (Lic Deva), *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Braşoveanu Gh.* (Colegiu Carol I, Craiova), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Coţiu Aurel* (Lic. Beiuş), *Creţa Gavril* (Polit., Timişoara), *Frunză Radu* (Polit, Timişoara), *Gligor Ioan* (student, Timişoara), *Goldiş Gh.* (Polit., Timişoara), *Gottard Francisc* (Polit, Timişoara), *Kinsky Ioan* (Polit., Timişoara), *London Emeric* (Polit, Timişoara), *Maziliu Marius* (Lic. Făgăraş), *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Mihuţiu Adrian* (Polit., Timişoara), *Petrovici Adalbert* (Lic. Brad), *Pop Emil* (Polit, Timişoara), *Popa Vasile* (Lic. Beiuş), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Roth Rudolf Egon* (Polit., Timişoara), *Serdeleanu Gh.* (Polit., Timişoara), *Simcso Carol* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petre* (Polit., Timişoara) şi *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş).

Problema 2312. — *Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile*

$$\sin\alpha\sin(\theta+\alpha)-\sin\beta\sin(\theta+\beta),$$
$$\cos\alpha\sin(\theta+\alpha)-\cos\beta\sin(\theta+\beta).$$

Să se arate apoi ce devin formulele găsite când se înlocuieşte θ *prin* $\theta+\frac{\pi}{2}$.

EUGEN VISA

Soluţie. Notând respectiv cu A şi B cele două expresii date, avem:

$$\begin{aligned} A &= \sin\alpha(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha) \\ &\quad -\sin\beta(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta) \\ &= \sin\theta(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta) \\ &\quad +\cos\theta(\sin^2\alpha-\sin^2\beta) \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)+ \\ &\quad +\cos\theta(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos\alpha(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha) \\ &\quad -\cos\beta(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta) \\ &= \sin\theta(\cos^2\alpha-\cos^2\beta) \\ &\quad +\cos\theta(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta) \\ &= \sin\theta(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta) \\ &\quad +\frac{1}{2}\cos\theta(\sin 2\alpha-\sin 2\beta). \end{aligned}$$

Transformând acum sumele şi diferenţele din paranteze în produse, putem scrie

$$A=\sin\theta\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+ 4\cos\theta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$B=-4\sin\theta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+ \cos\theta\cdot\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$

sau, ceeace e tot una,

$$A=\sin\theta\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos\theta\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$
$$B=-\sin\theta\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos\theta\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

şi încă ceva mai restrâns

$$A=\sin(\alpha-\beta)[\sin\theta\cos(\alpha+\beta)+\cos\theta\sin(\alpha+\beta)],$$
$$B=\sin(\alpha-\beta)[\cos\theta\cos(\alpha+\beta)-\sin\theta\sin(\theta+\beta)]$$

de unde, în cele din urmă rezultă

$$A = \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta+\theta),$$
$$B = \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta+\theta)$$

ceeace, în virtutea notațiilor adoptate, ne arată că formulele căutate sunt

$$\text{(I)}\quad \boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha\sin(\theta+\alpha)-\sin\beta\sin(\theta+\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta+\theta)\\ \cos\alpha\sin(\theta+\alpha)-\cos\beta\sin(\theta+\beta)=\sin\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta+0)\end{array}}$$

Înlocuind în aceste formule pe θ prin $\theta+\frac{\pi}{2}$, ele devin respectiv:

$$\text{(II)}\quad \boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)-\sin\beta\cos(\theta+\beta)=\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta+\theta)\\ \cos\alpha\cos(\theta+\alpha)-\cos\beta\cos(\theta+\beta)=-\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta+\theta\end{array}}$$

Soluții date de d-nii: *Avram Christache* (Lic. Brăila), *Bârsu Ion*, *Beşchea Radu* (Lic. Brăila), *Birănaş Ioan* (Polit., Timişoara), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Brasch Andrei* (Polit., Timişoara), *Cârnaţiu Ion* (Polit., Timişoara), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Georgescu Hristu* (Polit., Timişoara), *Goldis G.* (Polit., Timişoara), *Ileea Vasile*, *Maziliu Marius* (Lic Făgaraş), *Meteş Mircea* (Polit., Timişoara), *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Mihuţiu Adrian* (Polit., Timişoara), *Ovesea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Polit., Timişoara), *Vlăduţ C-tin* (Polit., Timişoara) şi *Vrănceanu Gh.* (Lic. Millt, Timişoara).

Problema 2332. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x^3 - a\,x\,y^2 = b \\ y^3 - a\,x^2 y = b. \end{cases}$$

Caz particular $a = -3$, $b = 32$.

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Scăzând ecuaţia a 2-a din prima, obţinem

$$x^3 - y^3 + a\,x\,y\,(x-y) = 0,$$

sau

$$(x-y)[x^2 + (1+a)\,x\,y + y^2] = 0.$$

De aci deducem

$$x - y = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 + (1+a)\,x\,y + y^2 = 0.$$

Sistemul dat este echivalent cu următoarele două sisteme

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x^3 - a\,x\,y^2 = b, \end{cases}$$

$$\text{(2)}\quad \begin{cases} x^2 + (1+a)\,x\,y + y^2 = 0 \\ x^3 - a\,x\,y^2 = b. \end{cases}$$

Cazul 1. Din prima ecuaţie din (1) deducem $y = x$, în virtutea căreia ecuaţia a 2-a devine

$$x^3(1-a) = b,$$

de unde

$$x^3 - \frac{b}{1-a} = 0,$$

sau

$$\left(x - \sqrt[3]{\frac{b}{1-a}}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{\frac{a}{1-b}}\cdot x + \sqrt[3]{\frac{b^2}{(1-a)^2}}\right) = 0.$$

Sistemul (1) admite deci soluţiile

$$x_1 = y_1 = \sqrt[3]{\frac{b}{1-a}},$$

$$x_{2,3} = y_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{b}{1-a}}\cdot\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Cazul 2. Prima ecuaţie din (2) se poate scri

$$\frac{y^2}{x^2} + (1+a)\cdot\frac{y}{x} + 1 = 0,$$

de unde

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}[-(1+a) \pm \sqrt{a^2+2a-3}] = A_{1,2},$$

deci

$$\text{(3)}\qquad y = A_{1,2}\,.\,x.$$

Înlocuind această valoare în ecuaţia 2-a din (2), avem

$$x^3(1 - a\,A_{1,2}^2) = b,$$

de unde

$$x^3 - \frac{b}{1 - a\,A_{1,2}} = 0.$$

De aci deducem

$$x_4 = \sqrt[3]{\frac{b}{1-a\,A_{1,2}^2}},\quad x_{5,6} = \sqrt[3]{\frac{b}{1-a\,A_{1,2}^2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Aceste valori introduse în (3) ne dau valorile corespunzătoare pentru y.

Sistemul dat admite încă soluţiile

$$\begin{cases} x_4 = \sqrt[3]{\dfrac{b}{1-a\,A_{1,2}^2}} \\ y_4 = A_{1,2}\sqrt[3]{\dfrac{b}{1-a\,A_{1,2}^2}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{5,6} = \sqrt[3]{\dfrac{b}{1-a\,A_1^2}}\cdot\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \\ y_{5,6} = A_{1,2}\sqrt[3]{\dfrac{b}{1-a\,A_{1,2}^2}}\cdot\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}, \end{cases}$$

unde

$$A_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[-(1+a)+\sqrt{a^2+2a-3}] \\ \dfrac{1}{2}[-(1+a)-\sqrt{a^2+2a-3}]. \end{cases}$$

Caz particular. Dacă $a=-3$, $b=32$ soluţiile din *cazul 1* devin

$$x_1=y_1=\sqrt[3]{\frac{32}{4}}=2, \quad x_{2,3}=y_{2,3}=-1\pm\sqrt{-3},$$

iar soluţiile din *cazul 2*, fiindcă $A_{1,2}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$, devin

$$\begin{cases} x_4=2 \\ y_4=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{5,6}=-1\pm\sqrt{-3} \\ x_{5,6}=-1\pm\sqrt{-3}. \end{cases}$$

Au dat bune soluţii: *Arnăuţu Marin* (Polit., Timişoara), *Birănaş Ioan* (Polit., Timişoara), *Bogza Mihai* (Lic Deva), *Chesaru Cristea* (Polit., Timişoara) *Tincu C-tin* (Polit., Timişoara) şi *Vlăduţ C-tin* (Polit., Timişoara)

N'au soluţionat complet problema, găsind numai soluţiile reale, d-nii: *Cârnaţiu Ioan* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Brăila), *Cociu Aurel* (Lic. Beiuş), *Fränkel David* (Polit., Timişoara), *Mircea Gheorghe* (Polit., Timişoara) *Mitric Aurel*, *Palade Dionisie* şi *Rohrlich Alfred* (Polit., Tim şoara).

PROBLEME PROPUSE

2386. — Să se găsească patratele perfecte de 10 cifre de forma $aabbccc689$.

G-L GH BUICLIU

2387. — Să se găsească valorile a, pentru care avem:

$$\sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}}+\sqrt{1-\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{2(2-a)}$$

şi valorile lui a pentru care avem

$$\sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}}-\sqrt{1-\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{2(2-a)}.$$

CPT C. IONESCU-TIU

2388. — Să se arate că expresia:

$$3.4+3.4.5+4.5.6.2+5.6.7.2^2+\cdots+(n-2)(n-1)n.2^{n-5}$$

se divide prin $n^3-6n^2+17n-24$. Care este câtul?

RADU FRUNZA

2389. — Să se determine a şi b astfel ca polinomul:

$$P(x)\equiv ax^4+bx^3-5x^2+9x-2$$

să fie divizibil prin x^2+x-2.

Înlocuind pe a şi b în valorile găsite, să se rezolve ecuaţia $P(x)=0$. Fie x_1 şi x_2 rădăcinele întregi ale ecuaţiei astfel ca $x_1>x_2$.

Considerăm cercul ce trece prin originea axelor de coordonate şi prin punctele $A(2x_1, x_2)$ şi $B(0, \alpha)$. Să se găsească locul geometric al intersecţiei tangentelor la cerc în punctele A şi B.

V. D. POPA

2390. — 1° Să se arate că funcţiile

$$y=\sqrt{(x-b)(a-x)}+\arcsin\frac{2x-a-b}{a-b},$$

$$y=\sqrt{(x-b)(a-x)}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

au aceiaşi derivată. (a şi b sunt constante).

2° Să se determine constantele a şi b astfel ca derivata aflată să fie nulă pentru $x=1$ şi să ia valoarea $-\frac{2}{\sqrt{-5}}$ pentru $x=3$.

V ALACI

2391. — Să se arate că derivatele succesive ale funcţiunei y definită de relaţia

$$e^y=(\sin x)^{\sin x},$$

verifică ecuaţia

$$(y^{IV}+y'')\operatorname{tg}^2x+(y'''+y')\operatorname{tg}^3x=2\operatorname{cosec}x.$$

CPT. M. GRUMAZESCU

2392. — Fiind dat un triunghiu oarecare ABC, de laturi a, b, c, iar O centrul cercului său circumscris, se duce din O câte o perpendiculară pe laturile triunghiului şi se prelungesc aceste perpendiculare în afara triunghiului, cu lungimi egale cu jumătăţile laturilor respective. Unind două câte două extremităţile acestor perpendiculare, se obţine astfel un nou triunghiu MNP.

1° Să se demonstreze că avem

$$\frac{\text{aria}(MNP)}{\text{aria}(ABC)}=\frac{1}{4}\sum(1+\operatorname{cotg}A)(1+\operatorname{cotg}B).$$

2° Dacă punctele N, A, P sunt colineare raportul precedent devine $\frac{(b+c)^2}{2bc}$.

VIRGIL GHITESCU

2393. — Să se verifice că într'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$\sum\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}}{\sec^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{4-\sin^2A}{5\sin^2A-2\cos A+6\cos^2A}\right)=$$

$$\prod\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}-2\sum\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

AL. TIGANOIU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bălteanu Gh. (2369, 2380, 2381); *Beschea Radu* (2355, 2358, 2359, 2366, 2367, 2370, 2371, 2373, 2375, 2380, 2381, 2382, 2383); *Butnaru Lia* (2367); *Costin Alexandrina* (2314, 2331, 2342, 2363, 2371, 2383); *Coman Liviu* (2339, 2342, 2371); *Ellmann Morel* (2379, 2380, 2381, 2383); *Enache Ion* (2371); *Frunză Radu* (P; 2339, 2355, 2371); *Giurconiu Mihai* (1955, 1971, 2282, 2284); *Gligor Ioan* (N; 1692, 2339, 2342, 2367, 2371); *Ilea Vasile* (2305, 2310, 2338, 2350, 2355, 2357, 2367); *Mitric Aurel* (P; 2314, 2316, 2331, 2333, 2338, 2339, 2342, 2350, 2355, 2364, 2366, 2368, 2370, 2371); *Palade Dionisie* (2331, 2333, 2338, 2339, 2342, 2350, 2355, 2366, 2368, 2370, 2371); *Prisecaru Mircea* (2338, 2354 2355, 2357, 2367); *Roth Rudolf Egon* (2380, 2381); *Rohrlich Alfred* (2323, 2381, 2383); *Sasu Ion* (2313, 2321, 2371, 2374, 2375); *Sergiu Pali* (1949, 1955, 1956, 1975, 1979, 2057, 2103, 2231, 2302, 2342. 2355): *Sin Gheorghe* (P; 2381); *Stern Tiberiu* (2331, 2339, 2342, 2380, 2381, 2382, 2383); *Tincu C-tin* (1894, 2063, 2087, 2094, 2103, 2250, 2276, 2303, 2309, 2316, 2345, 2347, 2350, 2355, 2357, 2360, 2362, 2363, 2364, 2366, 2367, 2371, 2379, 2380, 2383); *Tripşa Iosif* (2345, 2362, 2367, 2371); *Vrânceanu Gh.* (2331, 2345, 2346, 2362, 2367, 2371).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 300 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 3000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXVI. FEBRUARIE 1946 No. 12.

CID R104 1-12

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 3000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 30000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 50.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **ION IRIMESCU:** O NOUA METODA DE A GENERA CURBELE ROSACES.
2. NOTA MATEMATICA 27, 28, 29.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 2138, 2273, 2405 2406, 2409, 2410.
5. PROBLEME PROPUSE: 2488 - 2495.
6. TABLA DE MATERII.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul ori cărui nou abonament şi al oricărui volum este de 30.000 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 30000 (opt mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anii: I, XXIII şi XXV, epuizaţi. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 30.000 lei fiecare.

ANUL XXVI — No. 12. TIMISOARA, FEBUARIE 15

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 3000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30.000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

O NOUĂ METODĂ DE A GENERA CURBELE ROSACES

DE

ION IRIMESCU
ASISTENT LA POLITEHNICA DIN „IAȘI".

Intr'o notă matematică din „R. M. T.", d-l prof. *Botez* [1] a stabilit o transformare birațională ale cărei formule de trecere de la un punct considerat la punctul transformat sunt

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\ y_1 = \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \end{cases} \text{ și invers } \begin{cases} x = \dfrac{x_1(x_1^2+y_1^2)}{x_1^2-y_1^2} \\ y = \dfrac{y_1(x_1^2+y_1^2)}{x_1^2-y_1^2} \end{cases}$$

și care a condus la o clasă de cubice cu punct dublu.

Urmând indicațiilor d-lui prof. *Botez*, în ceea ce va urma, îmi propun să studiez această transformare.

I.

1. Astfel, transformând în acest mod cercul

$$x^2+y^2=r^2, \tag{1}$$

obțin ecuația

$$(x_1^2+y_1^2)^3 - r^2(x_1^2-y_1^2)=0, \tag{2}$$

sau încă

$$\varrho = \pm r\cos 2\varphi, \tag{3}$$

care nu este altceva decât curba *rosace à quatre branches* [2].

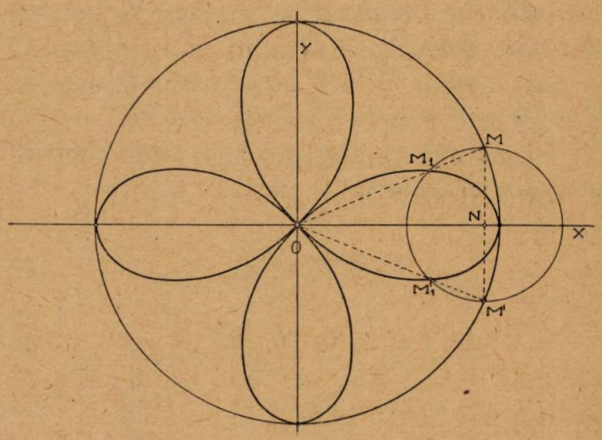
Vom ține seamă de construcția geometrică prin care d-l prof. *Botez* a obținut această transformare, care este următoarea:

[1] *Mihail St. Botez:* O transformare punctuală birațională; „R. M. T.", Vol. XX, p. 36.

[2] *F. Gomes Teixeira:* Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, T. II, p. 223.

„Se ia un cerc cu centrul în origina de coordonate, se duce o dreaptă variabilă trecând prin origină care taie cercul dat într'un punct M. *Intersecția* M_1 *a acestei drepte cu cercul, care are pentru centru abscisa punctului* M *și ca rază ordonata respectivă, este transformatul punctului* M".

De aci rezultă următoarea construcție a curbei *rosace.*



Se ia un cerc, care poate fi numit *cerc director* al curbei și se duce o dreaptă variabilă trecând prin origina coordonatelor care taie cercul director într'un punct M; locul punctelor M_1 transformate în felul indicat mai sus, este curba *rosace à quatre branches.*

De unde noua definiție: *Curba rosace à quatre branche este locul geometric al punctelor de intersecție a unei drepte variabile, trecând printr'un punct fix* O, *care este centrul unui cerc fix de rază r, cu un cerc variabil care are ca centrul piciorul perpendicularei dusă din punctul* M *de intersecție al dreptei variabile cu cercul fix* O, *pe un diametru fix a cercului* O *și ca rază lungimea acestei perpendiculare.*

2. Dacă se transformă în același mod elipsa,

raportată la centrul de coordonate, se obţine ecuaţia

$$(4) \qquad (b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2)(x_1^2 + y_1^2)^2 - a^2 b^2 (x_1^2 - y_1^2)^2 = 0,$$

care este o curbă de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină, a cărei ecuaţie în coordonate polare este următoarea

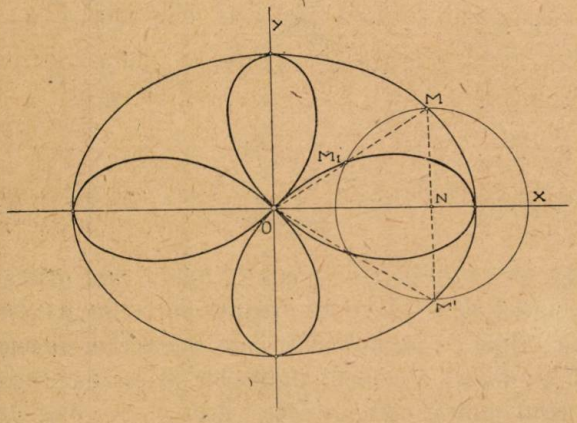
$$(5) \qquad \varrho = \pm \frac{a b \sqrt{2} \cos^2 \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Această ecuaţie reprezintă o curbă din familia curbelor *rosaces* şi pe care o cred nouă.

Propun de a fi numită curba, *rosace élliptique*, în acest caz curba *rosace* ordinară fiind numită curba, *rosace circulaire*.

Ţinând seamă de cele spuse, se poate da următoarea definiţie.

Curba rosace élliptique cu patru ramuri, este locul geometric al punctelor M_1 *de intersecţie a unei drepte variabile, trecând printr'un punct fix* O, *care este centrul unei elipse fixe, cu un cerc variabil care are ca centru piciorul perpendicularei duse din punctul* M *de intersecţie al dreptei variabile cu elipsa fixă, pe axa mare a elipsei* O *şi ca rază lungimea acestei perpendiculare.*



Această definiţie ne dă astfel un mijloc de construire prin puncte a curbei *rosace*, definită mai sus.

3. Dacă se ia pentru curbă directrice o iperbolă echilateră

$$(6) \qquad x^2 - y^2 = a^2,$$

se obţine o ecuaţie de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină şi care se descompune în

$$x_1^2 - y_1^2 = 0,$$

$$7) \qquad (x_1^2 + y_1^2)^2 - a^2 (x_1^2 - y_1^2) = 0.$$

Ecuaţia (7), în coordonate polare, ia forma

$$(8) \qquad \varrho = \pm a \sqrt{\cos 2\varphi},$$

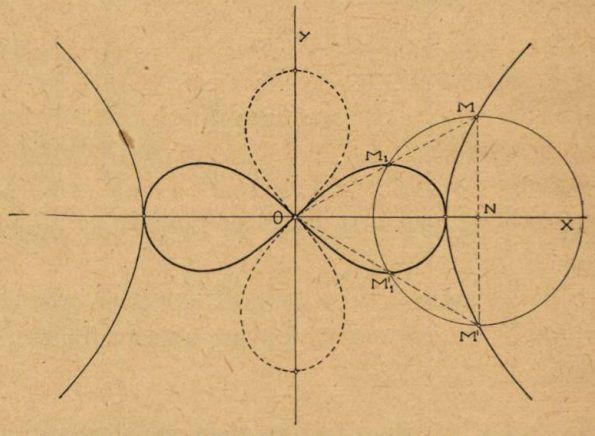
care nu este decât lemniscata lui *Bernoulli* [3]

Dacă punctul $M(x, y)$ descrie iperbola conjugată primei, atunci punctul M_1 va descrie o lemniscată care va fi conjugata primei.

Vom numi această lemniscată, povenind din iperbola considerată, *lemniscata iperbolică echilateră.*

După aceste consideraţii se poate da o nouă definiţie lemniscatei:

Lemniscata iperbolică echilateră este locul geometric a punctelor M_1 *de intersecţie a unei drepte variabile, trecând printr'un punct fix* O *care este centrul unei iperbole echilatere fixe, cu un cerc variabil care are ca centru piciorul perpendicularei duse din punctul* M *de intersecţie a dreptei variabile cu iperbola fixă, pe axa reală a iperbolei şi ca rază lungimea acestei perpendiculare.*



Această nouă definiţie ne permite de asemenea o construcţie a curbei prin puncte.

4. Dacă se ia pentru curba directrice o iperbolă oarecare cu centrul în originea coordonatelor,

$$(9) \qquad b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0,$$

se obţine o curbă de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină, a cărei ecuaţie este

$$(10) \qquad (b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)(x_1^2 + y_1^2)^2 - a^2 b^2 (x_1^2 - y_1^2)^2 = 0.$$

Ecuaţia (10) ia, în coordonate polare, forma

$$(11) \qquad \varrho = \frac{\pm a b \sqrt{2} \cos 2\varphi}{\sqrt{b^2 - a^2 + c^2 \cos 2\varphi}},$$

care este o *lemniscată iperbolică generală.*

[3]) Idem [2]), T. II, p. 189.

Definiţia acestei curbe este la fel ca acea a *lemniscatei iperbolice echilatere* şi are aceiaşi construcţie grafică.

5. Dacă se ia pentru curbă directrice o parabolă cu vârful în origina de coordonate de ecuaţie

(12) $$y^2 - 2px = 0,$$

se obţine o curbă de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină şi care se descompune în

$$x_1^2 + y_1^2 = 0,$$

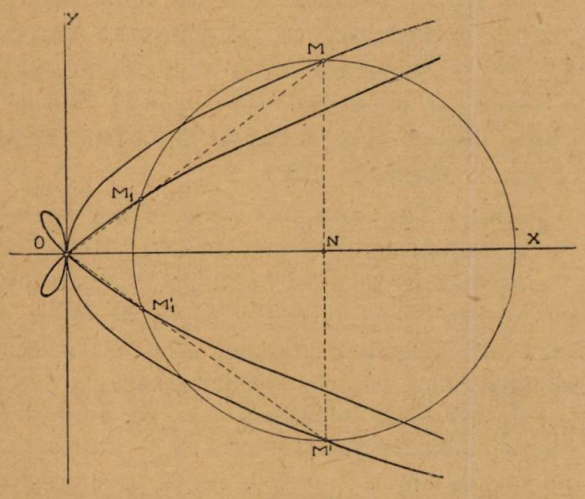
(13) $$y_1^2(x_1^2 + y_1^2) - 2p x_1 (x_1^2 - y_1^2) = 0.$$

Ecuaţia (13), transformată în coordonate polare, ia forma

(14) $$\varrho = \frac{2p \cos\varphi \cos 2\varphi}{1 - \cos^2\varphi}.$$

După aceste consideraţii se poate da curbei (14) definiţia următoare:

Curba (14) *este locul geometric a punctelor* M_1 *de intersecţie a unei drepte variabile, trecând printr'un punct fix* O *care este vârful unei parabole fixe, cu un cerc variabil care are ca centru piciorul perpendicularei din punctul* M *de intersecţie a dreptei variabile, cu parabola fixă* O, *pe axa parabolei şi ca rază lungimea acestei perpendiculare.*



Această definiţie ne dă astfel un mijloc de a construi curba prin puncte.

II.

1. Dacă punctul $M_1(x_1, y_1)$ va descri un cerc cu centru în origina de coordonate, a cărei ecuaţie este

(2) $$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

se obţine o ecuaţie de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină şi care se descompune în

$$x^2 + y^2 = 0,$$

(2) $$(x^2 - y^2)^2 - r^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Ecuaţia (2), în coordonate polare, ia forma

(3) $$\varrho = \pm \frac{r}{\cos 2\varphi},$$

care este o curbă de forma cunoscută sub numele de *curbă cruciformă* (Kreuzkurven [4]).

2. Dacă punctul $M_1(x_1, y_1)$ va descri o elipsă cu centru în origina de coordonate, a cărei ecuaţie este

(4) $$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2 = 0,$$

se obţine o curbă de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină, a cărei ecuaţie este

(5) $$(b^2x^2 + a^2y^2)(x^2 - y^2)^2 - a^2b^2(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Ecuaţia (5) ia, în coordonate polare, forma

(6) $$\varrho = \pm \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2\cos 2\varphi}} \cdot \frac{1}{\cos 2\varphi}.$$

Aceasta este o curbă de acelaşi fel ca şi (2).

3. Dacă punctul $M_1(x_1, y_1)$ va descri iperbola echilateră, a cărei ecuaţie este următoarea

(7) $$x_1^2 - y_1^2 = a^2,$$

se obţine o curbă de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină şi care are ecuaţia următoare

(8) $$(x^2 - y^2)^3 - a^2(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Ecuaţia (8) ia, în coordonate polare, forma

(9) $$\varrho = \pm \frac{a}{\sqrt{\cos^3 2\varphi}}.$$

Această curbă are aceiaşi formă ca şi curba (2).

4. Dacă punctul $M_1(x_1, y_1)$ va descri o iperbolă oarecare cu centrul în origina de coordonate, a cărei ecuaţie este

(10) $$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 - a^2 b^2 = 0,$$

se obţine o curbă de gradul 6 cu un punct cuadruplu în origină, a cărei ecuaţie este

(11) $$(b^2x^2 - a^2y^2)(x^2 - y^2)^2 - a^2b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

[4]) Idem [2]), T. II, p. 277.
Dr. Heinrich Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, p. 19.

Ecuația (11) ia, în coordonate polare, forma

$$(12) \qquad \varrho = \pm \frac{a b \sqrt{2}}{\sqrt{b^2 - a^2 + c^2 \cos 2\varphi}} \cdot \frac{1}{\cos 2\varphi}.$$

Această curbă este de aceiași formă ca și (2).

5. Dacă punctul $M_1(x_1, y_1)$ va descri o parabolă cu vârful în origina coordonatelor, a cărei ecuație este

$$(13) \qquad y_1^2 - 2p x_1 = 0,$$

se obține o ecuație de gradul 6 cu un punct cuadruplu in origină, care se descompune în

$$x^2 - y^2 = 0,$$

$$(14) \qquad y^2(x^2 - y^2) - 2p x (x^2 + y^2) = 0,$$

Curba (14), în coordonate polare, ia forma

$$(15) \qquad \varrho = \frac{2p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi \cos 2\varphi},$$

curbă de aceiași formă ca (2).

NOTE MATEMATICE

27. — GINO LORIA. Guida allo studio della Storia delle Matematiche. Ediția II, Edit *Hoepli*, Milano, 1946, 386 pag. 550 lire ital.

D-l *Gino Loria* e unul din rarii istorici ai matematicii din Europa. Acum câțiva ani a terminat publicarea excelentei sale Istorii a Matematicii, în trei volume, singura istorie astăzi accesibilă cititorilor. Zilele astea D-sa a luat inițiativa publicării unei opere colective, în 12 volume, de Istoria Universală a Matematicii.

Călăuza pe care o publica acum în ediția a doua e un instrument de lucru îndispensabil oricui vrea să adâncească studiul istoriei matematicii și, eventual, să facă cercetări originale în această disciplină. D-l *Loria* adună în acest volum o bibliografie de 2300 de autori și opere interesând istoria matematicii. Felul cum sunt grupate titlurile permite orientarea oricărui începător sau specialist în vastul domeniu al disciplinei și pune la curent cu literatura mai însemnată care trebue consultată în vederea oricărui capitol special.

Cartea are trei părți. Partea întâia dă indicații asupra pregătiri trebuitoare pentru a face cercetări în istoria matematicii. Partea a doua cuprinde enumerarea mijloacelor de studiu. În fine, a treia parte cuprînde patru note generale în legătură cu filosofia și istoria matematicii.

În partea întâi se dau câteva generalități asupra metodei istorice. Se dă apoi o listă a tuturor istoriilor generale ale matematicii apărute din 1742 până azi. Sunt indicate, cu notițe, istoriile lui *Heilbronner* (1742), *Montucla* (1792), *Kaestner* (1796—1800)), *Bossut* (1802), *Franchini* (1821), *Arneth* (1852), *H. Suter* (1873—1875), *Hankel* (1873), *Hoeffer* (1874), *M. Cantor* (edițiile 1901—1908), *Zeuthen* (1902—1912), *M. Marie* (1883—1888), *Roose Ball* (1887), *Cajori* (1897), *Tröpfke* (1902—1903), *D. E. Smith* (1923), *G. A. Miller* (1916), *F. Klein* (veacul XIX, în 1926), și *G. Loria* (1929—1933). Urmează istoriile pe națiuni (unde se găsesc și Românii); istoriile pe subiecte, monografiile. Un capitol însemnat e închinat cercetărilor de istoria matematicii în publicațiile periodice și în special *Il Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* al lui *B. Boncompagni* (1868—1887), *Bibliotheca matematica* a lui *Eneström* (1887—1914), *Quelen und Abhandlungen über Geschichte der Mathematik*, cele 30 de volume ale lui *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Buletinul de bibliografie și istorie al le *G. Loria* (din 1898), *Scripta Mathematica* al lui *Ginsburg* (din 1932). În fine, se analizează revistele de *istoria generală a științei* și în special *Isis* al lui *G. Sarton* (din 1914), *Osioris* al lui *G. Sarton* (din 1936), *Archeion* al lui *A. Mieli* (din 1920).

Partea a doua conține o vastă bibliografie a studiilor speciale de istoria matematicii: Manuscrisele, Matematica Grecilor și Latinilor, Popoarele extra europeene, Biografiile și colecțiile de opere complete ale învățaților moderni, Anuarele academice și universitare, corespondența științifică. Evident, aci lipsesc unele publicații, pe care autorul nu a avut materialmente, putința să le cunoască, de pildă opera lui *G. Țițeica*, vol. I. Dar aceste lipsuri se pot întregi în viitoarea ediție. Partea a doua se închee cu un capitol despre diferitele tipuri de scrieri istorice: Biografii, Diversele teorii și capitole speciale, istorii naționale, istorii generale, Crestomații matematice. Se dau indicații despre felul cum pot fi compuse acest fel de opere.

Volumul se închee cu patru note de interes general, care formează un fel de parte a treia: Ce se înţelege prin istoria ştiinţei. Învăţământul istoriei matematicii în cursul secundar. A urmat matematica o evoluţie într'o aceiaş direcţie? Caracterul unitar al matematicii.

Notele precedente dau o idee despre bogăţia volumului D-lui *Gino Loria*. Oricine se ocupă de istoria matematicii trebue să consulte călăuza D-lui *Loria*, ca o carte de bază.

P. SERGESCU

---

28. — TULLIO LEVI-CIVITA.

La 29 Decembrie 1946 s'au împlinit 5 ani de la moartea marelui matematician italian *T. Levi-Civita*. Născut în Padua la 29 Martie 1873, după o copilărie fericită, ajunge student la Universitatea din oraşul său natal, unde peste câţiva ani ia licenţa în matematici. Talentul, puterea de muncă şi mai ales lucrările sale în geometrie diferenţială şi mecanică îl fac cunoscut. La vârsta de 25 ani ajunge profesor la catedra de mecanică a Universităţii din Padua, catedră ce o va părăsi peste 20 de ani, în 1918, când este chemat la catedra de mecanică a Universităţi din Roma.

Cu o rară intuiţie geometrică, stabileşte căi noi în geometria diferenţială şi în calculul diferenţial absolut, făcând legătura cu teoria relativităţii. În anul 1900 apare „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", unde este prezentată teoria tensorilor în forma în care a fost întrebuinţată mai târziu de *A. Einstein*. În anul 1923 publică cartea: „Lezioni di mecanica razionale" care este azi unanim acceptată ca una din cărţile clasice în acest domeniu a matematicilor.

După cum spune *W. D. Hodge* „puţini matematicieni au fost aşa de mult iubiţi pentru calităţile personale ca *T. Levi-Civita*". În camera lui de lucru erau două portrete, a tatălui şi a lui *Garibaldi*. El singur nu face politică activă, însă se revoltă împotriva nedreptăţilor regimului fascist. E printre semnatarii faimosului *„manifest Croce"* în afacerea fruntaşului socialist *Matteoti*.

Atunci când Royal-Society îl alege membru, oficialitatea fascistă îl huiduieşte, şi e scos din învăţământ din motive rasiale. E chemat în Franţa, URSS, USA şi Anglia, dar el refuză, suferă cu întreg poporul umilinţa şi nedreptatea. În urma acestei jigniri va suferi de inimă, boală din care nu se mai reface şi moare în anul 1941, amărât şi necăjit de soarta Patriei.

În „The Journal of The London Mathematical Society", vol. 18, part. II, No. 70, 1945, al cărui membru era din anul 1924, a apărut un necrolog de *Hodge* în colaborare cu cei mai mari matematicieni ai lumi ca Sir *A. Eddington* (G. B), *E. T. Whittaker* (USA), etc.

KINSKY IOAN
student.

---

29. — În numerele 6, 7 ale R. M. T., vol. XXVI, d-l prof. *V. Alaci* soluţionează mai multe probleme în legătură cu relaţiile între funcţiuni trigonometrice inverse şi logaritmice cu aceiaşi derivată.

Păstrând notaţiile şi enunţurile din articolele citate, în cele ce urmează voiu da şi altă soluţie acestor probleme.

Problema 1-a. *Se dau funcţiile*:

$$(1)\quad y = \operatorname{arc\,tg}\, Y, \quad z = \frac{1}{2i}\log Z, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

unde Y, Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Y, *să se determine* Z *astfel ca funcţiile* (1) *să aibă aceiaşi derivată.*

Soluţie. Ca y şi z să aibă aceiaşi derivată, trebue ca diferenţa lor să fie constantă, adică

$$(2)\qquad z = y + C.$$

Din (1) avem:

$$Y = \operatorname{tg} y, \quad Z = e^{2iz}$$

şi ţinând seama de (2),

$$(3)\qquad Z = e^{2iC}\cdot e^{2iy} = e^{2iC}(\cos 2y + i \sin 2y).$$

Ca să avem pe Z în funcţie de Y, va trebui să exprimăm pe $\cos 2y$, $\sin 2y$ în funcţie de

$$\operatorname{tg} y = Y.$$

Avem

$$\sin 2y = \frac{2\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{2Y}{1+Y^2},$$

$$\cos 2y = \frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1-Y^2}{1+Y^2}.$$

Deci (3) ne dă:

$$Z = e^{2iC}\left(\frac{1-Y^2}{1+Y^2} + \frac{2iY}{1+Y^2}\right)$$

sau

$$Z = e^{2iC} \cdot \frac{(1+iY)^2}{(1-iY)(1+iY)} .$$

Simplificând şi punând $e^{2iC} = A$, avem formula:

(I) $$Z = A\frac{1+iY}{1-iY} .$$

Problema 2-a. *Cunoscând funcţia* Z *din* (1) *să determinăm pe* Y.

Ţinând seama de formulele lui *Euler*, avem

$$Y = \operatorname{tg} y = \frac{e^{2iy}-1}{i(e^{2iy}+1)} ,$$

iar din (3), avem:

$$e^{2iy} = \frac{Z}{A}$$

şi înlocuind mat sus, primim

(I_1) $$Y = \frac{\frac{Z}{A}-1}{i\left(\frac{Z}{A}+1\right)} = i\frac{A-Z}{A+Z} .$$

Problema 3-a. Din funcţiunile

$$y = \arcsin Y, \quad z = \frac{1}{2i}\log Z,$$

rezultă

$$Y = \sin y, \quad Z = e^{2iz}$$

şi cum vrem ca

$$z = y + C,$$

avem

$$Z = e^{2iC} \cdot e^{2iy} = e^{2iC}(\cos 2y + i \sin 2y).$$

Ne rămâne să exprimăm pe $\cos 2y$, $\sin 2y$ în funcţie de $\sin y = Y$.

Avem

$$\sin 2y = 2 \sin y \cos y = \pm 2Y\sqrt{1-Y^2}$$

$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y = 1 - 2Y^2$$

şi deci

$$Z = e^{2iC}(1 - 2Y^2 \pm 2iY\sqrt{1-Y^2}),$$

care se poate pune imediat sub forma

(II) $$Z = \left[A\left(iY \pm \sqrt{1-Y^2}\right)\right]^2, \quad A^2 = e^{2iC}.$$

Problema 4-a. *Să determinăm pe* Y *în funcţie de* Z *în problema precedentă.*

Din $Z = e^{2iy} \cdot e^{2iC} = A^2 e^{2iy}$, avem

$$e^{2iy} = \frac{Z}{A^2}$$

şi deci

$$e^{iy} = \pm\frac{\sqrt{Z}}{A} .$$

Pe de altă parte cu formulele lui *Euler*, avem

$$Y = \sin y = \frac{e^{2iy}-1}{2ie^{iy}} = \frac{\frac{Z}{A^2}-1}{\pm 2i\frac{\sqrt{Z}}{A}}$$

sau

$$Y = \pm\frac{Z-A^2}{2iA\sqrt{Z}}$$

şi luând A în locul lui A^2, obţinem

(II_1) $$Y = \pm\frac{Z-A}{2i\sqrt{AZ}} .$$

Problema 5-a. *Din funcţiile:*

$$y = \arccos Y, \quad z = \frac{1}{2i}\log Z,$$

cunoscând pe Y *să găsim pe* Z, *ca* y *şi* z *să aibă aceiaşi derivată.*

Soluţie. Avem

$$z = y + C,$$

$$Y = \cos y, \quad Z = e^{2iz} = e^{2iC}(\cos 2y + i \sin 2y).$$

Deci suntem conduşi să exprimăm pe $\cos 2y$, $\sin 2y$ în funcţie de $\cos y = Y$

$$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = 2Y^2 - 1,$$

$$\sin 2y = 2 \sin y \cos y = \pm 2Y\sqrt{1-Y^2}$$

şi deci

$$Z = e^{2iC}(2Y^2 - 1 \pm 2iY\sqrt{1-Y^2})$$

sau

(III) $$Z = \left[A\left(Y \pm \sqrt{Y^2-1}\right)\right]^2, \quad A^2 = e^{2iC}.$$

Problema 6-a. *Cunoscând pe* Z *să găsim pe* Y

Soluţie. Avem

$$Y = \cos y = \frac{e^{2iy}+1}{2e^{iy}} ,$$

iar din cele de mai sus

$$e^{2iy} = \frac{Z}{A^2}; \quad e^{iy} = \pm\frac{\sqrt{Z}}{A}$$

şi deci

$$Y = \frac{\frac{Z}{A^2}+1}{\pm 2\frac{\sqrt{Z}}{A}} = \pm\frac{Z+A^2}{2A\sqrt{Z}}$$

şi luând A în loc de A^2, avem

$$(III_1) \qquad Y = \pm\frac{Z+A}{2\sqrt{AZ}}.$$

Am găsit astfel aceleaşi rezultate ca în tabloul (T) din articolul menţionat [1]!

ST. MUSTA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, No. 5, Ianuarie 1947. Asupra unor transformări omografice, de C. *Ionescu Bujor.*

Raport pentru decernarea premiului „*Nicolae G. Botea*", de Ing. *E. N. Botea, Şerban Gheorghiu, C. Ionescu Bujor.* Note matematice, probleme rezolvate şi *propuse.*

2. *A. Gloden.* Table des solutions de la congruence $x^4+1=0$ (mod. p), pour $350.000 < p < 500.000$.

3. *D. I. Mangeron.* Sur le mouvement des certains systémes articulés de corps rigides pesants. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Juillet 1946).

4. *D. I. Mangeron.* Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. (Extras din Bul. Politehnicii „*Gh. Asachi*", Vol. I, Fasc. 2).

5. *D. I. Mageron.* Notes de Mécanique Rationnelle. Remarques sur le probléme généralisant celui de la cloche et son battant (Extras, id.).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2138. — *Să se găsească patru numere întregi consecutive ştiind că produsul a trei din ele este egal cu ăl patrulea urmat de zeruri.*

G-L. GH. BUICLIU

Soluţie. Fie a cel mai mic dintre numerele căutate şi n un întreg oarecare. După enunţ trebue să avem una din egalităţile

$$(1) \qquad a(a+1)(a+2) = 10^n(a+3).$$

$$(2) \qquad a(a+1)(a+3) = 10^n(a+2).$$

$$(3) \qquad a(a+2)(a+3) = 10^n(a+1).$$

$$(4) \qquad (a+1)(a+2)(a+3) = 10^n a.$$

Să le examinăm pe rând.

[1]) *V. Alaci:* „R. M. T.", Anul XXVI, Nr. 7.

1°. *Egalitatea* (1). Trebue ca $a+3$ să dividă membrul întâi. Dar $a+3$ nu poate avea comun cu a de cât divizorul 1 sau 3, cu $a+1$ numai divizorul 1 sau 2, iar cu $a+2$ este prim. Deci

$a+3=3b$, sau $a+3=2b$, sau $a+3=6b$.

Ducând în (1) pe fiecare din aceste forme şi simplificând, obţinem succesiv

$$(3b-3)(3b-2)(3b-1) = 10^n 3b,$$

$$\therefore \quad (b-1)(3b-2)(3b-1) = 10^n b.$$

Se vede că b nu divide membrul întâi de cât dacă

$$b=1 \quad \text{sau} \quad b=2.$$

Pentru $b=1$ găsim $a=0$ care dă soluţia banală

$$0\times 1\times 2 = 10^n\times 3.$$

Pentru $b=2$, găsim $a=3$, care dă soluţia

$$\boxed{3\times 4\times 5 = 6\times 10}, \text{ cu } n=1.$$

Luăm acum $a+3=2b$ şi găsim

$$(2b-3)(2b-2)(2b+1) = 10^n.2b,$$

$$\therefore \quad (2b-3)(b-1)(2b+1) = 10^n b,$$

$$\therefore \quad b=1, \text{ sau } 3.$$

$b=1$ dă imposibilitatea $a=-1$, iar $b=3$ dă $a=3$ soluţie deja găsită.

Pentru $a+3=6b$, avem

$$(6b-3)(6b-2)(6b-1) = 10^n.6b,$$

$$\therefore \quad (2b-1)(3b-1)(6b-1) = 10^n.b,$$

care nu are loc în numere întregi de cât pentru $b=1$, ceia ce conduce tot la soluţia $a=3$.

2° *Egalitatea* (2) arată că $(a+2)$ din membrul al doilea fiind prim cu $a+1$ şi cu $a+3$, trebuie să dividă pe a ceia ce nu se poate în numere întregi.

3°. *Egalitatea* (3). a şi $a+2$ sunt primi cu $a+1$. Deci $a+1$ trebue să dividă pe $a+3=a+1+2$. Aceasta se întâmplă numai dacă

$a+1=1 \quad \therefore a=0$ sau $a+1=2 \quad \therefore a=1$,

dar nici una din aceste valori nu dau soluţii.

4°. *Egalitatea* (4). a trebue să dividă pe $a+3$ şi pe $a+2$, deci

$$a=1 \quad \text{sau} \quad a=3 \quad \text{sau} \quad a=2,$$

care nu dau soluţii acceptabile.

În concluzie problema are o singură soluţie, exceptând soluţia banală $a=0$.

Notă 1° D-l *Păltăceanu D. V.* (Lic. Milit. Timişoara), a considerat cele 4 egalităţi dar a căutat să pună pe a în funcţie de divizori lui 10^n ceia ce l-a condus la demonstraţii neriguroase şi necomplecte.

Totuşi a găsit, într'un caz particular soluţia exactă. Pentru a arăta corespondenţilor cum se pot înşela în raţionamentul aritmetic, dau un singur exemplu din viciile de demonstraţie ale d-lui *Păltăceanu D. V.* La egalitatea (1) observă că $a+2$ este prim cu $a+3$ şi deci trebue să dividă pe 10^n *ceia ce este adevărat.* Dar de aici trage concluzia că

$$a+2=5^n \text{ sau } 2^p 5^n \text{ sau } 2^p$$

ceia ce este numai *parţial* adevărat, căci $a+2$ divide pe 10^n când avem mai general

$$a+2=2^{\alpha}.5^{\beta}$$

cu α şi β mai mici sau egali cu n.

Totuşi soluţia D-lui *Păltăceanu D. V.* merită să fie menţionată.

2° S-au mai primit 13 soluţii în care rezolvitorii s-au mulţumit să afirme că numerele 3, 4, 5, 6 răspund problemei fără a *arăta* cum le-au găsit.

3° Se poate înlocui 10^n cu un număr oarecare N.

G-l Gh B.

Problema 2273. — *Câte numere de câte trei cifre diferite între ele, sunt divizibile prin 6?*

G-l Gh. Buicliu

Soluţie. Pentru că numărul abc să se dividă prin 6 trebue ca cifra c să fie pereche, iar suma $a+b+c$ să fie un multiplu de 3. Deci dăm lui c pe rând valorile

$$c=0,\ 2,\ 4,\ 6 \text{ sau } 8.$$

Fie $c=0$. Vom avea următoarele 6 ecuaţii

$$a+b=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15 \text{ sau } 18,$$

pentru determinarea lui a şi b, unde cea mai mică valoare a lui a este 1 şi cea mai mare este 9. O dată determinat a rezultă imediat b prin o simplă scădere. Pentru a fi în restricţia dată de enunţ, vom da lui a numai valori diferite de c şi valori din care să nu rezulte $a=b$, nici $b=c$.

De exemplu ecuaţia

$$a+b=9$$

admite soluţiile

$$a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Valoarea 0 nu o vom lua în consideraţie, pentru $c=0$, iar din soluţiile ecuaţiei

$$a+b=6,$$

vom elimina pe lângă soluţia $a=0$ şi soluţia $a=3$, care dă $b=3$.

În fine dacă $a+b=18$ nu avem de cât

$$a=b=9,$$

care nu este în cadrul enunţului.

Cu aceste observaţiuni, este uşor de întocmit următorul tabel care dă toate soluţiile cerute în enunţ.

c	$a+b$	a (b este în ordine inversă)	Nr. de soluţie
0	3	1, 2	2
	6	1, 2, 4, 5	4
	9	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	8
	12	3, 4, 5, 7, 8, 9	6
	15	6, 7, 8, 9	4
2	1	0, 1	2
	4	0, 1, 3, 4	4
	7	0, 1, 3, 4, 6, 7	6
	10	1, 3, 4, 6, 7, 9	6
	13	4, 5, 6, 7, 8, 9	6
	16	7, 9	2
4	2	0, 1	2
	5	0, 2, 3, 5	4
	8	0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8	8
	11	2, 3, 5, 6, 8, 9	6
	14	5, 6, 8, 9	4
	17	8, 9	2
6	3	0, 1, 2, 3	4
	6	1, 2, 4, 5	4
	9	0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9	8
	12	3, 4, 5, 7, 8, 9	6
	15	7, 8	2
8	1	0, 1	2
	4	0, 1, 3, 4	4
	7	0, 1, 2. 3, 4, 5, 6, 7	8
	10	1, 3, 4, 6, 7, 9	6
	13	4, 6, 7, 9	4
	16	7, 9	2

Totalizând rezultatele din coloana ultimă se găseşte că sunt 126 numere de câte 3 cifre diferite între ele, divizibile prin 6 şi anume:

115 numere; 11 numere formal de 3 cifre.

D-nii *Cochela I. Liviu* şi *Vrânceanu G. G* (Lic. Milit, Timişoara) şi *Tincu C. C.* (Timişoara), au rezolvat complect problema examinând toate cazurile şi găsind rezultatul exact.

D-l *Constantinescu N. Ilie* (Brăila), a găsit 116 soluţii, iar D-l *Chiriae Const.* a găsit 122 soluţii.

Dacă nu se pune restricţii ca numerele să fie scrise cu cifre diferite se găsesc 161 numere de 3 cifre divizibile prin 6 din care 15 numere sunt numai formal de 3 cifre.

Problema 2405. — *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(x-y)^2}{(a-b)^2} \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1. \end{cases}$$

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţie. Scăzând numărătorii şi numitorii primei ecuaţii, obţinem

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}=\frac{xy}{ab}, \text{ sau, } abx^2-a^2xy-b^2xy+aby^2=0.$$

Această ecuaţie se mai poate scri

$$ax(bx-ay)-by(bx-ay)=0,$$

sau

$$(bx-ay)(ax-by)=0.$$

Sistemul dat este astfel echivalent cu următoarele două sisteme

$$(1)\quad \begin{cases} bx-ay=0 \\ bx+ay=ab, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} ax-by=0 \\ bx+ay=ab. \end{cases}$$

Adunând şi scăzând ecuaţiile sistemului (1), deducem

$$(1')\quad \begin{cases} x=\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

Pentru rezolvarea sistemului (2), înmulţim întâi prima ecuaţie cu a şi a 2-a cu b şi adunăm; apoi, înmulţim prima ecuaţie cu b şi o scădem din a 2-a înmulţită cu a, deducem respectiv

$$(2')\quad \begin{cases} x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Soluţiile (1') şi (2') sunt tocmai soluţiile sistemului dat.

Soluţii date de d-nii: *Anastasescu Decebal* (P. T.), *Balaniscu Chirică* (student, Cluj), *Bălăuţă Mihai* (Lic. Deva), *Berlovan Gh.* (P. T), *Beşchea Radu* (P. B.), *Bogza Mihai* (Roman), *Bonea Anton* (Brăila), *Burzuloiu Virgil* (Lic. Tg. Jiu), *Cernescu Nicolae* (Colegiul, N. Filipescu), *Chiriac C.* (Brăila), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Ciucurel Emilian* (P. T.), *Constantinescu Paul*, *Constantinescu Virgil*, *Corduneanu C-tin* (Colegiul, N. Filipescu), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Crăcea D-tru* (Lic Slatina), *Crăciunescu V.*, *Dăscălescu Mihai* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Dănescu Alexandru* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Diaconu Vasile* (Colegiul, N. Filipescu), *Dobrişan Alexandru* (P. T.), *Feldman Ştefan* (P. T.), *Fitero Ioan* (P. T.), *Fleşeriu Eugen* (Lic. Alba-Iulia), *François Al.* (Brăila), *Frunză Radu* (P. T.), *Ganea C-tin*, *Georgian Nicolae* (Colegiul N. Filipescu), *Gherlan I.* (Lic. Beiuş), *Ghertler R.*, *Ghetu Eugen* (Lic. Brăila), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Hagiu Ilie* (P. T.), *Haret Radu* (Bucureşti), *Hurezeanu Romulus*, *Iancu Simion* (P. T.), *Lebovics Ervin* (P. T.), *Mărcescu Ion* (Colegiul, N Filipescu), *Mărcuţiu Silviu* (Lic. Cluj), *Marinescu D.* (Ploeşti), *Munteanu Ioan* (Colegiul, N. Filipescu), *Neguţ Ion* (Lic. Tg.-Jiu), *Novac Ioan* (P. T.), *Opriş C-tin* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Păişanu. Ilie*, *Pisanca Ionel* (Colegiul Loga, Timişoara), *Popa Vasile* (P. T.), *Popescu Alexandru*, *Popescu D-tru* (P. T.), *Popovici Dan* (P. T.), *Puşcasiu Silviu* (Lic. Buzeşti, Craiova), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj), *Sasu Ion* (P. T.), *Scoridor Gh.* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T.), *Szekely Gh.* (Cluj), *Teiuşan Horia* (Beiuş), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P. T.), *Tucă Marin* (P. T.), şi *Turbuţiu Gh.*

Problema 2406. — *Să se arate că funcţiile*

$$y=\arccos\frac{x-1}{x+1}, \qquad z=2\operatorname{arc\,tg}\frac{9-x}{3(x+1)+10\sqrt{x}}$$

au aceiaşi derivată şi să se explice rezultatul.

V. ALACI

Prima soluţie. Derivând pe rând funcţiile date şi simplificând, avem succesiv

$$(1)\ y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=-\frac{2}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-(x-1)^2}}=-\frac{2}{(x+1).2\sqrt{x}}=-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

$$z' = 2\frac{1}{1+\dfrac{(9-x)^2}{[3(x+1)+10\sqrt{x}]^2}} \cdot \frac{-3(x+1)-10\sqrt{x}-(9-x)\left(3+\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)}{[3(x+1)+10\sqrt{x}]^2}$$

$$= 2\frac{-3(x+1)\sqrt{x}-10x-(9-x)(3\sqrt{x}+5)}{\{[3(x+1)+10\sqrt{x}]^2+(9-x)^2\}\sqrt{x}} = 2\frac{-3x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-10x-27\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-45+5x}{[9(x+1)^2+100x+60(x+1)\sqrt{x}+81+x^2-18x]\sqrt{x}}$$

$$= 2\frac{-30\sqrt{x}-5x-45}{10x^2+100x+90+60(x+1)\sqrt{x}]\sqrt{x}} = -\frac{6\sqrt{x}+x+9}{[x^2+10x+9+6(x+1)\sqrt{x}]\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{6\sqrt{x}+x+9}{[x+1)(x+9)+6(x+1)\sqrt{x}]\sqrt{x}},$$

sau

(2) $$z' = -\frac{6\sqrt{x}+x+9}{(x+1)(x+9+6\sqrt{x})\sqrt{x}} = -\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Privind relaţiile (1) şi (2) deducem că funcţiile date au aceiaşi derivată.

Explicarea rezultătului. Trecând la funcţiile inverse celor date, avem

(3) $\dfrac{x-1}{x+1} = \cos y$, (4) $\dfrac{9-x}{3(x+1)+10\sqrt{x}} = \operatorname{tg}\dfrac{z}{2}$.

Din (3) deducem

$$x = \frac{1+\cos y}{1-\cos y} = \frac{2\cos^2\frac{y}{2}}{2\sin^2\frac{y}{2}} = \operatorname{cotg}^2\frac{y}{2},$$

deci

(5) $$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{1}{\pm\sqrt{x}}.$$

De altă parte, relaţia evidentă

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}},$$

având în vedere relaţiile (4) şi (5), devine

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right) = \frac{\dfrac{1}{\pm\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{3(x+1)+10\sqrt{x}}}{1+\dfrac{9-x}{\pm[3(x+1)\sqrt{x}+10x]}} =$$

$$\frac{3(x+1)+10\sqrt{x}-9\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{3(x+1)\sqrt{x}+10x+9-x} =$$

$$\frac{3(x+1)+\sqrt{x}(x+1)}{3[(x+1)\sqrt{x}+3(x+1)]} = \frac{(x+1)(\sqrt{x}+3)}{3(x+1)(\sqrt{x}+3)},$$

deci

$$\operatorname{tg}\frac{y-z}{2} = \frac{1}{3}.$$

De aci deducem

$$y - z = 2k\pi + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \text{ct.}$$

Arcele y şi z diferind printr'un arc constant, asta explică de ce funcţiile date y şi z au aceiaşi derivată.

Soluţii bune date de d-nii: *Anastasescu Decebal* (P. T), *Balanicu Chirică* (student, Cluj), *Bală C-tin* (Lic. Tg. Jiu), *Berlovan Gh.* (P. T.), *Cernescu Nicolae* (Colegiul, N. Filipescu), *Chiriac C.* (Brăila), *Ciucurel Emilian* (P. T.), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Feldman Ştefan* (P. T.), *Fitero Ioan* (P. T.), *Fleşeriu Eugen* (Alba Iulia), *François Al.* (Brăila), *Gherban V.* (Lic. Beiuş), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gligor Ioan* (student, Cluj), *Hagiu Ilie* (P. T.), *Iancu Simion* (P. T.), *Mărcuţiu Silviu* (P. T.), *Mitric Aurel* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T.), *Pisanca Ionel* (Colegiul Loga, Tim), *Popa Vasile* (P. T.), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Popescu D-tru* (P. T.), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj), *Serengău Mihai* (P. T.), *Teiuşan Horia* (student) *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P. T.), şi *Turbuţiu Gh.* (Lic. Cluj). S'au primit şi 3 soluţii bune neiscălite.

Soluţia 2-a. Folosim cunoştinţele dintr'un articol al „R. M. T." [1]. Acolo se dă o nouă metodă care permite a afirma — fără a efectua direct derivarea — dacă două funcţii de forma

(1) $y = \arccos Y$, $z = 2\operatorname{arc\,tg} Z$ (Y şi Z funcţii de x)

au sau nu aceiaşi derivată. Se demonstrează anume

[1]) *V. Alaci*: Funcţii trigonometrice inverse cu aceiaşi derivată. „R. M. T.", Anul XXVI, p. 4.

că, pentru a putea afirma că funcţiile (1) au aceiaşi derivată, *trebuie ca din egalitatea corespunzătoare din tabtoul de la p. 5, dintre* Y *şi* Z *să putem determina pentru* k *o valoare constantă* $(-1<k<1)$.

În adevăr, în fabloul de la p. 5, linia 9, a articolului menţionat relaţia dintre Y şi Z din dreptul funcţiilor (1), unde luăm semnul + înaintea radicalilor, este

$$(2) \qquad Z=\frac{-Y+\sqrt{1-k^2}}{k+\sqrt{1-Y^2}},$$

relaţie care aplicata funcţiilor din enunţ, devine

$$\frac{9-x}{3(x+1)+10\sqrt{2}}=\frac{-\frac{x-1}{x+1}+\sqrt{1-k^2}}{k+\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}=$$

$$\frac{-x+1+(x+1)\sqrt{1-k^2}}{k(x-1)+2\sqrt{x}}=\frac{-5x+5+5(x+1)\sqrt{1-k^2}}{5k(x+1)+10\sqrt{x}}$$

Comparând numitorii din primul şi ultimul membru, deducem cu uşurinţă că pentru identitatea lor este suficient să luăm $k=\frac{3}{5}$. Rămâne să vede dacă pentru această valoare şi numărătorii sunt identici.

În adevăr observăm că pentru $k=\frac{3}{5}$, numărătorul ultimului membru devine

$$-5x+5+5(x+1)\cdot\frac{4}{5}=9-x,$$

deci este egal tocmai cu numărătorul din primul membru.

În concluzie relaţia (2), pentru cazul nostru, având loc pentru o valoare constantă a lui k cuprinsă între $(-1, 1)$ fiindcă $-1<\frac{3}{5}\leq 1$, rezultă că funcţiile din enunţ au aceiaşi derivată.

Exlicarea rezultatului se face ca în prima soluţie.

Soluţii bune date de d-nii: *Bală C-tin* (Lic. Tg.-Jiu), *Bogza Mihai* (Roman), *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Crăciunescu Victor Dăscălescu Mlhai* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Dobrişan Alexandru* (P. T.), *Lebovics Ervin* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Pisanca Aurel* (Colegiul Loga, Timişoara), *Scoridor Gh.* (P. T.) şi *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Problema 2409. *Să se arate că într'un triunghiu* A B C, *avem relaţia:*

$$\sin A\cos 2A\sin(C-B)+\cos B\cos 2B\cos(A-C)=\cos C\cos 2C\cos(A-B).$$

MARIA MEUMANN

Soluţie. Fiindcă $A+B+C=0$, rezultă

$$\sin A=\sin(B+C),\quad \cos B=-\cos(A+C),$$

astfel că primul membru al relaţiei din enunţ, notat cu E, devine,

$$(1) \qquad E=\sin(B+C)\cos 2A\sin(B-C)-\cos(A+C)\cos 2B\cos(A-C).$$

Dar

$$\sin(B+C)\sin(C-B)=\frac{\cos 2B-\cos 2C}{2},$$

$$\cos(A+C)\cos(A-C)=\frac{\cos 2A+\cos 2C}{2}$$

şi (1) devine

$$E=\frac{\cos 2A\cos 2B-\cos 2A\cos 2C-\cos 2A\cos 2B-\cos 2B\cos 2C}{2}$$

$$=\frac{-\cos 2C(\cos 2A+\cos 2B)}{2}.$$

Cum,

$$\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}=\cos(A+B)\cos(A-B)$$

$$=-\cos C\cos(A-B)$$

rezultă că relaţia devine

$$E=\cos C\cos 2C\cos(A-B).$$

Relaţia cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anastasescu Decebal* (P. T.), *Balaniscu Chirică* (student Cluj), *Bălăuţă Mihai* (Lic. Deva), *Berlovan Gh.* (P. T.) *Beşchea Radu* (P. B.), *Brasch Andrei* (P. T.), *Cernescu Nicolae* (Colegiul, N. Filipescu), *Chiriac C-tin* (Brăila), *Ciucurel Emilian* (P. T.), *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Constantinescu Virgil*, *Corduneanu C-tin* (Colegiul, N. Filipescu), *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina), *Dănescu Alexandru* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Dăscălescu Mihai* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Diaconu Vasile* (Colegiul, N. Filipescu), *Dobrişan Alexandru* (P. T.), *Feldman Ştefan* (P. T.), *Fitero Ioan* (P. T.), *François Al.* (Brăila), *Frunză Radu* (P. T.), *Gligor Ioan* (student, Cluj), *Hagiu Ilie*, *Haret Sp. Radu* (Bucureşti), *Lebovics Ervin* (P. T.), *Măncescu Ion* (Colegiul, N. Filipescu), *Mărcuţiu Silviu* (Cluj), *Munteanu Ion* (Colegiul, N. Filipescu), *Nedelcu Ulpius* (Şc. of. de Geniu, Bucureşti), *Novac Ioan* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Pisanca Ionel* (Timişoara), *Popa Vasile* (P. T.), *Popovici Dan* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj), *Sasu Ioa* (P. T.), *Scoridor Gh.* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T.), *Stanciu Valeriu* (Lic. Milit., Craiova), *Stern Tiberiu* (P. T.), *Teiuşan Horia* (P. T), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P. T.) şi *Turbuţiu Gh.*

Problema 2410. — *Să se găsească patratul de trei cifre, la care sporind toate cifrele cu 2, să obţinem un cub perfect.*

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţie. Cel mai mic patrat de cifre este $100=10^2$, iar cel mal mare este $961=31^2$. Deci cubul perfect care trebuie obţinut se va găsi între 322 şi 1183. Dar cuburile cuprinse între aceste numere sunt

$$343=7^3,\quad 512=8^3,\quad 729=9^3,\quad 1000=10,$$

Numai 343 şi 729 li se pot micşora cu 2 cifrele şi obţinem

121 şi 507.

Dintre acestea numai 121 este patrat perfect şi ne dă soluţia problemei.

Soluţii bune date de d-nii: *Bală C-tin* (Lic. Tg.-Jiu), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Corduneanu Constantin, Dănescu Alexandru* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Gaicu Alexandru* (Lic. Braşov), *Gherlan Vasile* (Lic. Beiuş), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Pisanca Ionel* (Timişoara), *Puşcaşiu Silviu* (P. T.), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj) şi *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Soluţii mai lungi date de d-nii: *Beşchea Radu* (P. B.), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Crăcea D.* (Lic. Slatina), *Dăscălescu Valeriu* (Bucureşti), *Diaconu Vasile* (Colegiul, N. Filipescu), *Fitero Ioan* (P. T.), *François Al.* (Brăila), *Gheţu Eugen* (Lic. Brăila), *Mănescu Ion* (Colegiul, N. Filipescu), *Moldovan Mircea* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Stanciu Mihai* (Lic. Milit., Craiova), *Szekely Gh.* (Cluj), şi *Tucă Marcu* (P. T.).

PROBLEME PROPUSE

2488. — Să se arate că numărul 4567 se poate descompune într'o diferenţă de două patrate.

LT. COL EUGEN ŞT. IACOB

2489. — Dacă $\varphi(N)$ este numărul numerelor prime cu N şi inferioare lui N. iar $a, b, \ldots$, sunt factorii primi ai lui N, atunci

$$2 \times N \times \varphi(N) + (-1)^n \varphi(a, b, \ldots)$$

se devide prin 3.

G-L GH. BUICLIU

2490. — Intr'o grădină sunt plante. Grădinarul vrea să le distrugă şi rupe zilnic acelaşi număr. Peste noapte îusă, cele rămase se dublează ca număr mai puţin două.

Câte plante au fost şi câte rupe grădinarul zilnic, ştiind că a patra zi (după ce a rupt acelaş număr ca şi în celelalte zile), plantele au fost distruse.

MAIOR G. P. BOERECCU

2491. — Să se găsească un grup de patru numere întregi, care să satisfacă ecuaţia

$$x^3+y^3+z^3=A^3.$$

G-L GH. COATU

2492. — Fie xOy un unghiu drept, iar D_1 şi D_1' două drepte simetrice în raport cu Ox, care trec prin O. Fie A centrul unui cerc, ce trece prin punctul O şi care este tangent dreptei D_1', iar B simetricul punctului O în raport cu A. Perpendiculara dusă în B pe dreapta D_1 taie laturile unghiului drept în punctele C şi D

Să se arate că B este mijlocul segmentului C D.

MARIA NEUMANN

2493. — Să se rezolve un trapez A B C D cunoscându-i baza mică, unghiul B, precum şi razele r_1, r_2 ale cercurilor înscrise în triunghiurile BA_1A, CD_1D, unde $AA_1=DD_1$ sunt înălţimele trapezului.

V. ALACI

2494. — Se dă un triunghiu dreptunghic A B C. Se duce bisectoarea interioară şi exterioară a unghiului drept, care tae ipotenuza în A' şi A_1. Se consideră cercurile inscrise în triunghiurile A B C şi A' A A_1. Dacă notăm cu r_1 şi r_2 razele cercurilor, să se demonstreze relaţia

$$r_1 r_2 = \sqrt{2}\, b^2 \operatorname{sp} C \operatorname{sp} \frac{C}{2} \operatorname{sp} \frac{45-C}{2}.$$

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

2495 — Intr'o uzină metalurgică se toarnă un corp sferic omogen din fontă. Modelul prevedea că din interiorul sferei S_1 să lipsească o altă sferă S_2, care putea fi înscrisă într'un con circular isoscel drept, cu vârful în centrul corpului sferic, iar baza tangentă sferei S_1.

Se cere poziţia centrului de greutate a corpului sferic în funcţie de raza R a sferei S_1.

IOAN KINSKY

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetică.

		Pag
D. Pompeiu	Raţionamentul aritmetic: Câteva exemple	27

b) Algebră.

V. Alaci	Funcţii trigonometrice inverse cu cu aceiaşi derivată	4
G. Silaş	Soluţii întregi ale ecuaţiilor . .	42
V. Alaci	Funcţii trigonometrice inverse şi fuucţii logaritmice care au aceiaşi derivată	65, 77
A. Gloden	Nouvelles définitions sur les multigrades	134

c) Geometrie.

Gh. V. Niculescu	Trapeze particulare	15
R. Bouvaist et V. Thébault	Sur une tétraèdre spécial	92

d) Trigonometrie.

V. Alaci	Câteva teoreme în Trigonometria patratică	117
Ion Irimescu	O nouă metodă de a genera curbele *Rosaces*	145

e) Geometrie analitică.

N. N. Mihăileanu	Coordonate analagmatice . . .	55
Maria Neumann	Asupra unor proprietăţi ale iperbolei şi aplicaţille lor	105

f) Istorie matematică.

D. I. Mangeron	Opera ştiinţifică a lui *Magnus Mittag-Leffler*	28, 39
M. Gh. Dumitrescu	Evulaţia desvoltării Geometriei Neeuclidiene	89

g) Diverse.

Gh. Buicliu	O nouă aniversare	1
I. Constantinescu	Un sfert de veac de apariţie . .	2
V. Alaci	25 ani de existenţă	3
V. Alaci	† Ion Ionescu	133

II. REDACŢIONALE.

* * *	Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timişoara	12, 13, 14
* * *	*Informaţie.* Institutul de Ştiinţe Matematice	33

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetică şi Teoria Numerelor.

		Pag.
6*) **Gh. Buicliu**	Asupra problemei 2265	30
4. **O. N. Ţino**	Asupra problemei 2265	18
7. **O. N. Ţino**	Asupra problemei 2289	31

b) Algebră.

1. **A. Gloden**	Étant donée la relation multigrade $a_1, a_2, a_3 \overset{2,4}{=} b_1\ b_2, b_3$, dans laquelle $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ on aura: $3a_1 - a_1, 3b_1 - b_2, 2b_3 - b_2 + b_1, 2a_3 + a_2 - a_1 \overset{1,3,5}{=}$ $3a_1 - a_2, 3b_2 - b_1, 2a_3 - a_2 + a_1, 2b_3 + b_1 - b_1$ . .	6
3. **A. Gloden**	Quelque égalités multigrade . . .	17
9. **A Gloden**	Problème	45
18. **V. Ghiţescu**	Asupra divergenţei seriei armonice	82
20. **V. Alaci**	Asupra articolului din acest număr	83
21. **M. Adam**	Generalizarea problemei 2342 . .	94
24. **A. Gloden**	Analyse multigrade	110
25. **O. N. Ţino**	Asupra probemei 2174	123
26. **V. Ghiţescu**	Asupra problemei Nr. 2132 . .	135

c) Geometrie.

2. **M. Neumann**	Asupra soluţiei geometrice a unei neegalităţi	7
8. **Gh. Buicliu**	Observare	32
10. **V. Thébault**	Sur le point de *Feuerbach* . . .	45
12. **V. Thébault**	Tétraèdre homothétique	57
15. **V. Thébault**	Sur la parabole	69
16 **N. N. Mihăileanu**	O rectificare	69
22. **I. I. Novac**	Relaţii între razele cercurilor exînscrise şi raza cercului înscris într'un triunghiu dreptunghiu	94

d) Trigonometrie.

23. **P. Teodorescu**	Asupra unor relaţii trigonometrice	96
29. **Stefan Musta**	. . . . .	149

e) Geometrie analitică.

11. **N. N. Mihăileanu**	Câteva locuri geometrice . .	46

f) Analiză Matematică.

5. **M. Grumăzescu**	Asupra unei probleme de examen	19
13. **F. Goga**	Asupra unei eeuaţii diferenţiale de ordinul întâi	58

g) Mecanică.

14. **I. Linteş**	Asupra problemei Nr. 426 din „Exerciţii şi Probleme" de *T. Angheluţă*	59

*) În acestă coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

17. B. Lascu Asupra unei teoreme referitoare la pendulul sferic . . . . . Pag. 70

19. A. Stan Asupra Notei 14 din R M. T., Nr. 5. VII. 1946 82

h) **Bibliografie.**

27. P. Sergescu *Gino Loria.* Guida allo studio della Storia delle Matematiche 148

28. Kinsky Ioan *Tullio Levi-Civita* 149

IV. BIBLIOGRAFIE.

a) **Articole.**

M. St. Botez Sur une surface cerelée particuliere 110

M. St. Botez Remarcă asupra metodei *Kubota* 110

D. Germani şi C. Budeanu Forţa de inerţie . . . 71

Gh. Th. Gheorghiu Sur certaines transformations asymtotiques 33

A. Gloden Mehrgradige Gleichungeu . . . 33

A. Gloden Sobre et análisis diofántico multigrade 46

A. Gloden Table de factorisation des nombres dans l'intervalle $1000 < x < 3000$. 110

A. Gloden Une nouveauu théorème sur les multigrades 127

A. Gloden La vie et l'oeuvre scientifique de *Gabriel Lipmann* 136

A. Gloden Two theorems ou multi-degree equalties 96

M. Haimovici Sur les système homographiques de courbes daux l'espace à *n* dimensions 127

C. A. Honae Protecţia generatoarelor de curent alternativ contra ajungerilor la pământ ale statorului 136

A. Maior Gravitation et Thermodynamique 136

D. I. Mangeron Matematica în cadrul gândirii ştiinţifice şi a Culturii 20, 33

D. I Mangeron Problema spectrelor şi probleme de contur pentru o clasă de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordin superior 33

D. I. Mangeron Funcţiile lui *Greeu* de ordin *p* în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordin superior 33

D. I. Mangeron Noui metode de cercetări pentru determinarea integrarelor ecuaţiilor liniare cu derivate parţiale prin aplicarea transformatei multiple a lui *Laplace* cu domeniul de integraţie finit 33

D. I. Mangeron Mécanique non-lineaire sur les systèmes oscillatoires non lineaires . 60

D. I. Mangeron Gottfried *Wilhelm Leibniz* . . . 60

D. I. Mangeron Sur le mouvement de certaines systémes articulés de corps rigides pesants. 151

D. I. Mangeron Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur . . . . . Pag. 151

D. I. Mangeron Notes de mécanique rationnelle . 151

P. Sergescu Geometria în învăţământul technic 33

P. Sergescu L'Université de Cluj et ses relations avec l'étranger 33

P. Szymanski Essai sur la théorie mathématique des sensations de couleur . . . 33

b) **Cărţi şi cursuri apărute.**

M. St. Botez Geometria descriptivă 32

M. St. Botez Aplicaţiile Geometriei descriptive . 110

Gh. Th. Gheorghiu 64 de examene de admitere la Politehnicile din România . . . 46

L. Ghircoiaşiu, I. Stamate, A. Viciu Exerciţii de Matematici generale 16

P. Sergsecu Curs de Geometrie analitică . . 32

I. Stamate Reprezentări grafice 136

c) **Reviste.**

Bulţtin Matematico 71, 127

Buletinul Politechnicei „*Gh. Asachi*“ din Iaşi . . 83

Gazeta Matemaiică 7, 20, 32, 46, 60, 71, 83, 96, 110, 127, 136, 151

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Examen de admitere în anul I. la Politechnica din Timişoara 124, 135

VI. ERATA.

— Numele propunătorului Problemei Nr 2429 . . 66

— Rectificarea Problemei Nr. 2427 66

— Inlocuirea Problemei Nr. 2118 cu altă problemă . 66

— Rectificarea Problemei Nr. 2362 . . . . . 66, 76

— Rectificarea Problemei Nr. 2463 116

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XXVI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).	1).	2).	3).	4)
50	110	I		185	126	II	
69	142	„		194	142	„	
				206	174	„	
110	14	II		217	185	„	
121	30	„					
124	46	„		244	46	III	
140	62	„		268	78	„	
175	110	„		275	94	„	
178	126	„		291	126	„	

1).	2).	3).	4).
317	174	III	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
359	62	„	
376	94	„	
382	110	„	
393	126	„	
407	158	„	
411	158	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
535	30	VI	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
613	190	„	127
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
654	102	„	
686	134	„	
695	199	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
860	108	IX	
867	122	„	
879	144	„	
924	60	„	
939	84	„	
954	108	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	

1).	2).	3).	4).
984	12	XI	
992	24	„	
1008	48	„	
1012	48	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	138	„	
1077	138	„	
1093	24	XII	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	140
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	60
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1187	24	XIII	
1188	24	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	20
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	

1).	2).	3).	4).
1253	120	XIII	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1289	36	„	
1295	36	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1323	88	„	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1405	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	

1).	2).	3).	4).
1443	120	XV	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1490	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1514	88	„	
1516	88	„	
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	
1571	24	„	
1575	24	„	
1582	36	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1600	60	„	
1604	72	„	
1613	84	„	

1).	2).	3).	4).
1615	84	XVII	
1618	96	„	
1621	96	„	
1624	96	„	
1627	108	„	
1628	108	„	
1632	108	„	
1637	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1643	132	„	
1645	132	„	
1651	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1656	144	„	
1661	12	XVIII	
1662	12	„	8
1667	24	„	
1668	24	„	
1670	24	„	
1671	24	„	
1672	24	„	
1676	36	„	
1678	36	„	
1679	36	„	
1680	36	„	34
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1694	60	„	
1695	60	„	
1706	84	„	
1708	84	„	
1709	84	„	
1711	84	„	
1714	96	„	
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	
1718	96	„	
1722	108	„	
1723	108	„	9
1724	108	„	
725	108	„	
	120	„	
1726	108	„	
1728	120	„	
1733	120	„	
1737	132	„	
1739	132	„	
1740	132	„	
1741	132	„	
1742	132	„	

1).	2).	3).	4.)
1744	149	XVIII	
1747	149	„	
1749	149	„	
1750	149	„	
1754	16	XIX	
1755	16	„	
1756	16	„	
1821	156	„	
1758	16	„	21
1759	16	„	
1762	28	„	
1763	28	„	
1764	28	„	
1767	28	„	
1865	68	XX	
1769	40	XIX	
1772	40	„	
1780	56	„	
1781	56	„	
1784	80	„	
1789	80	„	
1792	124	„	
1795	124	„	
1796	124	„	
1797	124	„	
1800	124	„	
1802	136	„	
1803	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1808	136	„	
1809	156	„	
1811	156	„	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1816	156	„	
1820	169	„	
1822	169	„	
1824	169	XIX	
	16	XX	
1832	18	„	
1833	28	„	
1838	28	„	
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	
1847	44	„	
1849	44	„	
1852	56	„	
1853	56	„	
1854	56	„	
1857	56	„	

1).	2)	3).	4)
1858	68	XX	
1860	68	„	
1861	62	„	
1865	68	XX	
1767	28	XIX	
1868	80	„	
1869	80	„	22
1873	80	„	
1874	92	„	9
1877	92	„	
1878	92	„	
1880	92	„	
1646	132	XVII	
1881	92	XX	
1882	104	„	
1886	104	„	
1889	104	„	
1893	116	„	
1894	116	„	
1897	116	„	
1898	128	„	
1901	128	„	
1903	128	„	
1905	128	„	
1906	140	„	
1907	140	„	
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1915	157	„	9
1917	157	„	
1919	157	„	
1920	157	„	
1921	157	„	
1922	12	XXI	
1925	12	„	
1926	12	„	
1930	12	„	
1932	24	„	
1935	24	„	
1937	24	„	
1938	36	„	
1940	36	„	
1941	36	„	
1942	36	„	
1943	36	„	
1944	36	„	
1945	36	„	
1949	48	„	
1945	48	„	
1951	48	„	
1952	48	„	
1953	48	„	

1).	2).	3).	4).
1954	64	XXI	
1955	64	„	22
1956	64	„	23
1957	64	„	
1958	64	„	
1959	64	„	24
1960	64	„	25
1961	64	„	
1963	76	„	
1964	76	„	
1965	76	„	
1966	76	„	
1967	76	„	
1968	76	„	
1971	88	„	
1972	88	„	
1973	88	„	
1974	88	„	
1975	88	„	
1976	88	„	
1977	88	„	
1979	100	„	
1982	100	„	
1983	100	„	
1984	100	„	
1986	112	„	
1989	112	„	
1990	112	„	
1991	112	„	
1995	124	„	
1996	124	„	
2000	124	„	
2001	124	„	
2003	136	„	
2004	136	„	
2009	136	„	
2012	148	„	
2015	148	„	
2016	148	„	
2017	148	„	
2018	16	XXII	
2019	16	„	
2022	16	„	
2024	16	„	
2025	16	„	
2026	16	„	
2027	36	„	
2032	30	„	
2033	30	„	
2035	42	„	
2039	42	„	
2040	42	„	
2042	54	„	
2043	54	„	

1).	2).	3).	4).
2045	54	XXII	
2046	54	„	
2047	54	„	
2048	54	„	
2049	54	„	
2050	66	„	
2051	66	„	
2052	66	„	
2053	66	„	
2054	66	„	
2055	66	„	
2056	66	„	
2057	66	„	
2058	78	„	
2062	78	„	
2063	78	„	
2064	78	„	
2065	78	„	
2070	90	„	127
2073	90	„	
2074	102	„	
2075	102	„	
2078	102	„	
2080	102	„	
2086	114	„	
2087	114	„	
2090	126	„	
2093	126	„	
2094	126	„	
2095	126	„	
2096	126	„	
2098	138	„	
2099	138	„	
2100	138	„	
2102	138	„	
2103	138	„	
2104	138	„	
2108	150	„	
2110	150	„	
2111	150	„	
2112	150	„	96
2117	12	XXIII	
2118	12	„	
	66	XXVI	
2119	12	„	
2121	12	„	
2122	26	„	
2126	26	„	
2127	26	„	
2128	26	„	
2129	26	„	
2131	38	„	
2133	38	„	
2134	38	„	

1)	2).	3).	4).
2135	38	XXIII	
2136	38	„	
2137	38	„	
2138	50	„	151
2140	50	„	
2142	50	„	
2143	50	„	
2147	62	„	
2149	62	„	
2153	62	„	
2158	74	„	
2159	74	„	
2160	74	„	47
2165	86	„	
2166	86	„	
2167	86	„	
2168	86	„	
2169	86	„	72
2171	98	„	34
2174	98	„	111
2177	98	„	36
2178	110	„	
2179	110	„	
2180	110	„	
2182	110	„	60
2183	110	„	
2184	110	„	
2189	123	„	
2193	134	„	
2194	134	„	
2195	134	„	
2197	134	„	
2199	134	„	
2200	134	„	
2201	146	„	
2202	146	„	
2204	146	„	
2205	146	„	
2206	146	„	
2208	146	„	
2209	11	XXIV	
2210	11	„	
2211	11	„	
2212	11	„	
2215	11	„	84
2218	26	„	
2219	26	„	
2220	26	„	
2221	26	„	
2222	26	„	
2223	26	„	
2224	26	„	
2225	38	„	
2228 bis 56		„	

1).	2).	3).	4).
2229	38	XXIV	
2230	38	„	
2233	50	„	
2234	50	„	
2235	50	„	
2238	50	„	
2239	50	„	
2247	62	„	
2248	62	„	
2249	74	„	
2250	74	„	
2251	74	„	
2254	74	„	
2255	74	„	
2258	86	„	
2259	86	„	
2260	86	„	25
2261	86	„	
2262	86	„	
2266	98	„	
2268	98	„	
2270	98	„	
2271	98	„	
2272	98	„	36
2273	110	„	
2274	110	„	
2275	110	„	
2276	110	„	
2277	110	„	
2278	110	„	
2279	110	„	
2280	110	„	
2281	122	„	
2282	122	„	
2283	122	„	
2286	122	„	
2287	122	„	
2291	134	„	
2292	134	„	
2293	134	„	
2294	134	„	
2295	134	„	
2297	146	„	
2301	146	„	
2302	146	„	111
2303	146	„	
2306	11	XXV	
2307	11	„	
2308	11	„	
2309	11	„	112
2313	26	„	112
2314	26	„	
2315	26	„	
2316	26	„	

1).	2).	3).	4)
2317	26	XXV	
2319	26	„	113
2320	26	„	
2321	38	„	
2322	38	„	
2323	38	„	
2224	38	„	
2325	38	„	
2326	38	„	
2327	38	„	
2328	38	„	
2329	50	„	
2330	50	„	
2331	50	„	
2333	50	„	
2334	50	„	
2335	50	„	10
2336	50	„	
2337	62	„	37
2338	62	„	136
2339	62	„	61
2340	62	„	
2341	62	„	
2342	62	„	61
2343	62	„	
2344	62	„	
2345	74	„	
2346	74	„	
2347	74	„	48
2348	74	„	
2349	74	„	
2350	74	„	63
2351	74	„	
2353	86	„	
2354	86	„	
2355	86	„	49
2356	86	„	
2357	86	„	49
2358	86	„	
2359	86	„	64
2360	86	„	73
2361	98	„	
2362	98	XXIV	
	66	XXV	
2363	98	„	85
2364	98	„	65
2365	98	„	
2366	98	„	
2367	98	„	87
2368	98	„	
2369	110	„	
2370	110	„	
2371	110	„	
2372	110	„	

1).	2).	3)	4)
2373 .	110 .	XXV	
2374 .	110 .	„	
2375 .	110 .	„	
2376 .	110 .	„	
2377 .	121 .	„	
2378 .	121 .	„	
2379 .	121 .	„	
2380 .	122 .	„	87
2381 .	122 .	„	97
2382 .	122 .	„	
2383 .	122 .	„	
2384 .	122 .	„	114
2385 .	122 .	„	
2386 .	134 .	„	
2387 .	134 .	„	
2388 .	134 .	„	
2389 .	134 .	„	98
2390 .	134 .	„	137
2391 .	134 .	„	99
2392 .	134 .	„	
2393 .	134 .	„	99
2394 .	146 .	„	
2395 .	146 .	„	115
2396 .	146 .	„	138
2397 .	146 .	„	
2398 .	146 .	„	
2399 .	146 .	„	139
2400 .	146 .	„	140
2401 .	146 .	„	141
2402 .	11 .	XXVI	
2403 .	11 .	„	142

1).	2).	3).	4)
2404 .	11 .	XXVI	143
2405 .	11 .	„	154
2406 .	11 .	„	155
2407 .	11 .	„	
2408 .	11 .	„	
2409 .	11 .	„	155
2410 .	26 .	„	156
2411 .	26 .	„	
2412 .	26 .	„	
2413 .	26 .	„	
2414 .	26 .	„	
2415 .	26 .	„	
2416 .	26 .	„	
2417 .	26 .	„	
2418 .	38 .	„	
2419 .	38 .	„	
2420 .	38 .	„	
2421 .	38 .	„	
2422 .	38 .	„	
2423 .	38 .	„	
2424 .	38 .	„	
2425 .	38 .	„	
2426 .	50 .	„	
2427 .	50 .	„	
2428 .	50 .	„	
2429 .	50 .	„	
2430 .	50 .	„	
2431 .	50 .	„	
2432 .	50 .	„	
2433 .	50 .	„	
2434 .	66 .	„	

1).	2).	3).	4).
2435 .	66 .	„	
2436 .	66 .	„	
2437 .	66 .	„	
2438 .	66 .	„	
2439 .	66 .	„	
2440 .	76 .	„	
2441 .	76 .	„	
2442 .	76 .	„	
2443 .	76 .	„	
2444 .	76 .	„	
2445 .	76 .	„	
2446 .	76 .	„	
2447 .	76 .	„	
2448 .	88 .	„	
2449 .	88 .	„	
2450 .	88 .	„	
2451 .	88 .	„	
2452 .	88 .	„	
2453 .	88 .	„	
2454 .	88 .	„	
2455 .	88 .	„	
2456 .	100 .	„	
2457 .	100 .	„	
2458 .	100 .	„	
2459 .	100 .	„	
2460 .	100 .	„	
2461 .	100 .	„	
2462 .	100 .	„	
2463 .	100 .	„	
2464 .	116 .	„	
2465 .	116 .	„	

1).	2).	3).	4)
2466 .	116 .	„	
2467 .	116 .	„	
2468 .	116 .	„	
2469 .	116 .	„	
2470 .	116 .	„	
2471 .	116 .	„	
2462 .	128 .	„	
2473 .	128 .	„	
2474 .	128 .	„	
2475 .	128 .	„	
2476 .	128 .	„	
2477 .	128 .	„	
2478 .	128 .	„	
2479 .	128 .	„	
2480 .	144 .	„	
2481 .	144 .	„	
2482 .	144 .	„	
2483 .	144 .	„	
2484 .	144 .	„	
2485 .	144 .	„	
2486 .	144 .	„	
2487 .	144 .	„	
2488 .	156 .	„	
2489 .	156 .	„	
2490 .	156 .	„	
2491 .	156 .	„	
2492 .	156 .	„	
2493 .	156 .	„	
2494 .	156 .	„	
2495 .	156 .	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abel H N. 29. 39.
Abramescu N. 12 46 58. 88. 92
Adam M 94.
Adam D. R. 12
Adamescu M 12.
Alaci V. 1. 2. 3. 4. 10. 11. 12 15. 21 25. 26. 27. 36. 38. 39. 48. 50. 51. 58. 61 64. 65. 66. 67 72. 76. 77 83 86. 88. 89. 97. 100. 101. 112. 114. 116. 117. 128. 133. 134. 137 140 144. 145. 151. 153. 156
Albeaţă N. E 127.
Alberti B. L 41.
D'Albon 84.
Aldea N A. 127.
D'Alembert 41.
Almăjan P. 12
Amărăşteanu F. M. 21.
Ambruş F. 12.
Anastasescu D. 138 142. 143. 153, 154, 155
Anastasiade I. 12.
Andronescu P 3. 12.
Angheluţă Th. 12 46. 59. 82. 94.
Aniţescu N N. 11. 12. 142.
Anton I. 24. 61. 97. 111.
Antoni P C. 84.
Antoniu S. I. 20. 110. 136.
Appell P 29.
Ardelean S. 12.
Arghiriade E. 12
Arheion 148.
Arnăutu M. 36. 50. 61. 62. 66. 87
Arneth 148.
Atanasescu V D. 127. 138. 142. 143.
Avram C. 114.
Bădescu R. 12.
Baidaff B. I. 12
Bakony C 10. 22. 23. 24. 25 34.
Bakony C. 12.
Bală C. 142 154. 155. 156.
Balanişcu C 50. 85. 87. 98. 99. 138. 140. 143. 153. 154. 155.
Bălăuţă M. 100. 112. 116. 142. 153. 155.
Băleanu D 60.
Băleanu G. 98.
Bănărescu M. 3. 12
Băncilă G. 12.
Barbiliau D 33.
Barbirin P 92.
Barbu I. 37 66 85. 112
Bărbulescu V. 62.
Bărglăzan A 12.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Barna L. 12.
Baron C. 12
Barteles 90.
Bârzescu A. 144
Baltrami E. 89
Beneş P. 12.
Berindean V 12.
Berlovan G. 143, 153.
Bernoulli 146
Bertrand 29.
Berzănescu A. 12.
Berzélius 29.
Beşchea G. N. 127.
Beşchea R 11, 49, 61, 62, 64 87, 88, 98, 99 138, 140, 142, 153, 155, 156.
Bieberbach L. 40.
Binet 60
Birănaş I. 25, 36, 48, 49, 50, 61, 62, 63, 64, 66 86, 87, 88 99, 100, 111, 112, 114, 116 137, 138, 140, 141, 142.
Bitang A. 97.
Bjerkness 29
Blaşian V. 3, 12
Bobârnac M. 12.
Bodnărescu M. H. 127
Bogza M 11 34, 49, 50, 61, 63, 65, 85, 87, 100, 112 128, 138, 140, 141, 142, 153 154.
Boerescu P. G 9, 50, 88, 100 115, 128, 142 156.
Boiangiu I. G 21.
Du Bois Reymond 29.
Bolcaş V. 48, 61.
Boleanţu L 24.
Bolyai 90 91.
Boncompagni 148.
Bonea I. 12
Bonea A. 153
Boşian O. 12.
Bossie B 48.
Botez M. 145.
Boţan V. N 84.
Borca N. G. 151
Bouvaist R 92.
Brânceni-Iliescu B. 29.
Brasch A 49, 61 64 87 98, 99 100 138 140 142, 143 155.
Braşoveanu G. 11, 49, 62, 85, 100, 113.
Brătucu C 12.
Brioschi 29.
Bruckner V. 83.
Budeanu C 71, 116.
Buiolin G. 1 3, 9 11 12, 20 21, 22 26 31, 32, 38 46 50, 60, 66 72, 76 84, 88, 96, 100 111, 116 127, 128 144, 151, 152 156.
Bumbu V 12.
Bunescu A. 20, 32, 83, 96, 127.
Butnariu Lia 87
Burzuloiu V. 153.

Călniceanu C 12.
Cajori 148.
Călugăreanu G. 12
Cândea C. 1, 12.
Cantor G 29, 39.
Cantor M. 148.
Carleman T. 30
Cârnaţiu I. 11, 38, 49, 62.
Carnot 109.
Cârstoiu I. 34.
Casey 57.
Casorati 29
Catalan 91.
Catona V. 12.
Cătuneanu C 12.
Cauchy A. 30, 39, 91.
Cazanacli P 21, 22, 29
Cernescu N. 142, 153, 154, 155.
Cetăţeanu S. 12
Cherţman M. 22
Chesaru P. C 11, 37, 61, 62, 64, 85, 112, 114.
Chioreanu I. 143
Chiriac C. 9, 21, 23, 24, 38, 60, 85, 86, 87 112, 137, 153, 154, 155.
Chiriţescu N 12.
Ciobanu V. 12.
Ciochină I 84.
Cioclov N. 12
Ciorănescu N. 7 33
Ciucescu N. 153, 155
Ciucurel E. 142, 153, 154, 155
Claudian V. 12
Climescu C. A. 84
Coadă I. 21
Coandă I. V 72.
Coatu Gh 156.
Cochela L. 85, 153
Coman A. 1, 12
Coman L. 61, 62 98, 99, 138
Comănescu A. 12
Constantinescu G. 12
Constantinescu G. G 12.
Constantinescu N. I 2, 11, 26 36, 37, 38 48 49, 50 61, 62 63 66, 73, 85, 87, 88 99, 100, 111, 112, 113, 114, 116, 128, 138 140, 141, 142, 143, 153, 155 156.
Constantinescc V. 142, 153, 155 156
Constantinescu P. 153.
Conta V 127.
Contrea A. 12.
Coduneanu C 142, 143, 153, 155, 156
Corlăţeanu V. 84.
Corvin-Krukowski 40
Coşniţă C. 127.
Costăchescu V C. 12, 38, 50, 76 116 127, 128, 144, 156.
Costin Alexandrina 48, 61, 62, 86, 99, 138, 142.
Cotariu D M. 111.
Coţin A. 24 48, 49, 61, 62, 85, 86 87, 98, 99, 138, 140, 141, 143, 153 154.
Crăcea D 153, 155.
Crăciunescu V. 88, 153
Creangă I. 84
Crelle L. 28.
Creţa F G. 21, 37, 111, 112.
Cristea M. 99, 138, 140, 142.
Cris.ea V 24.
Cristescu I. 12.
Cristescu V 1, 2, 60, 65.
Cristodorescu G. 12.
Cristodulo N 12.
Cservény I. 12.
Curea I 12.

Dănescu A 142, 143, 155, 156.
Darboux 29.
Dăscălescu H. 12.
Dăscălescu M 142, 143, 153, 155.
Dăscălescu V. 156.
David V 61.
Dedekind 39.
Deheleanu G. 24
Demetrescu G. 12, 33
Denis C. 60
Diaconescu N. 12
Diaconu V. 142, 143, 153, 155, 156.
Dica Rodica 61
Dimitriu G. 12.
Dinculescu C 12.
Dirichlet 39.
Dobrescu A. 11, 26, 143
Dobrescu E. 23, 24
Dobrescu Filofteia 12.
Dobrişan A. 11, 48 49, 61, 63, 87, 88, 98, 99, 138 140, 141, 142, 153 155
Dobrotescu G. 11, 49, 61.
Domilescu E. 88, 98, 99, 143
Dorwart L. H. 94
Dragomirescu-Buzne E. 94.
Drăguţ D. V. 127
Dumitrescu I. E 127.
Dumitrescu G. M. 89
Dumitriu-Dada 12.
Dürer A 41.

Eddington 149.
Einstein 92, 144.
Eisenstein 39
Ellmann M. 88, 98.
Emmanuel D 30.
Enache I. 24, 61 111.
Enăchescu I 24, 25, 97.
Ensein 84.
Eneström 148.
Euclid 89 91 92
Euler 150.

Fabius Dorina 72.
Facsko I G. 9.
Feldmann S. 142, 153, 154 155.
Feuerbach 45
Filimon I. 49, 50 61, 62, 76, 83 100, 111, 112, 138 140, 141.
Filip P. 24
Filipescu M. 12
Fitero I. 114, 116, 143, 153 154, 155, 156
Fleşeriu E. 88 99, 138, 140, 153, 154.
Floareş I M. 127.
Florescu M. 12.
Florian C. 85.

Franchini 148.
François A. 142. 143. 153. 154. 155. 156
Fränkel D. 61.
Frătici I. 12
Fricke 29.
Fridlovsky A 12.
Froda A. 33.
Frunză R. 26. 49. 61. 88 98. 99. 111. 136. 138. 143. 153. 155
Fuchs 29.

Galilei G. 41.
Gaicu A. 156.
Gaiu N 96.
Galois 39.
Gancea C 98. 138. 153.
Gârneaţă E. 127.
Gâţă G. G 10. 23. 24.
Gauss 89.
Ganea C. 153
Georgescu D. 12.
Germani D 71.
Gheorghiu Ad. 7. 60. 127.
Gheorghiu A. 12
Gheorghiu Th. Gh. 12. 53. 34. 38. 46
Gheorghiu Ş. 20. 60. 71. 136
Gheorghian N. 153.
Gherlan V. 142. 153. 154. 156
Gheţea T. 85.
Gheţu E .143. 153. 156
Ghica A. 33.
Ghiciu V. 88. 98.
Ghimuş D. 23. 24.
Ghircoiaşiu V. N. 13. 60
Ghişoiu P. 127.
Ghiţescu S. 13
Ghiţescu V. 13. 66. 82. 116. 134.
Ginsburg 148.
Giurconiu M. 23 24. 26. 48. 49. 50. 61. 65. 66 75. 76. 85. 86. 87. 88. 98 99. 100 112. 113. 114 116. 128. 138. 140. 141. 142. 144. 153. 154. 156
Gligor N. I. 10. 24. 25. 37. 63. 85. 87. 97. 99. 139 142 154.
Gloden A. 7. 13. 17. 18. 25. 33. 45. 46. 96. 110. 127. 134. 136 151. 155.
Godea P I. 9. 23. 24. 61.
Godeanu V. 21. 60.
Goethe 41.
Goga F. 13. 24. 58. 88.
Goldiş G. 26. 61. 63 88. 99. 114. 116. 138. 141. 142
Gottard F. 48. 49. 50. 61 63 85. 87.
Green 33.
Grigore A. G 38 88.
Grigore C. G. 49. 61.
Grigore I 61.
Grozescu L. 23 25.
Grumăzescu M. 11. 13 20. 21 88. 99.
Guttmann T. 49 61. 62. 98. 116. 138. 140

Hagiu I. 29. 142. 153. 154. 155.
Haimovici A. 84.
Haimovici M 127.
Heilbronner 148.
Halsted B. G 91.
Hankel 148.
Haret R. 11 49. 61. 62. 87. 142. 143. 153. 155
Hendh M. 61.
Herman V. 13.
Hermite C. 28. 29.
Hilbert 29.
Hodge 149
Hofer O. 13.
Hompola T. 21.
Honae C 13. 136.
l'Hôspital 49. 83. 87. 141.
Houël J. G 90. 91
Hoffer 148.
Hriatiuc M. 13.
Hristea H 13.
Hurwitz 29.

Iacob C. 136.
Iacob Ş E. 13. 24. 156.
Iasinschi N. 13.
Ieşan A 24.
Ignat M P. 127.
Ilea S 13.
Ilea V. 49. 50. 63. 87. 99. 141.
Ioachimescu G A. 1. 2. 46.
Ionescu D. 21.
† Ionescu I. 1. 2. 7. 20. 110. 133. 134. 136.
Ionescu F. P. 10. 23. 24. 25. 144
Ionescu D. V. 7. 13.
Ionescu-Biss P. H. 13
Ionescu-Bujor C. 7. 13. 151.
Ionescu-Ţiu D. C. 13. 34 66
Iosifescu C. 24. 61.
Irimescu Ion 145
Iisis 148
Ivănescu C. 13. 71.

Jacobi 39.
Janţă V. 99. 138
Jidanu I. C. 21. 22. 34
Jivănescu S. 13.
Juncu N. 13

Kaldor 1.
Kästner 18. 52.
Kielburger M 13.
Kinsky I. 23. 24. 85. 149. 156.
Klein 29. 148
Kluger I. 85.
Kowalewski Sofia 29. 40. 41.
Kowalewski Sonia 41.
Kronecker 39
Kühn I. 13.
Kummer 29 39.

Laguerre 29.
Lalescu T 1. 2. 30.
Lambrino V. 13.
Laplace 57.
Lascu B 13 71.
Laţiu V. 3. 13.
Lebovics E. 142. 143. 153. 155.
Leffler-Edgren C. Anne 30. 41
Leffler F. 30.
Legendre 89. 91.
Leher Margareta 72
Leibnitz V. G. 60.
Leonida D 13.
Lepădatu I. M. 127.
Levi-Civita 199
Lie 33.
Lindelöf 29.
Lindfors 28.
† Linteş I 13 110.
Linné 29.
Liouville J. 28
Lipmann G. 126.
Lipschitz 29
Liteanu G. 13. 60.
Litrov 90.
Lobatchewsky I N. 89. 90. 91.
Lomonosov 41.
London E. 26. 85
Loria G. 33. 148. 149.
Loziciu I 76 113.
Luca I. 22. 23. 24 25.
Lupan A. 13
Lupescu G C. 21. 60. 111.

Macavei E. 61. 64. 87. 88. 99 138. 140.
Macovschi E. 13.
Mahrenholz J 22. 23. 24. 25. 36 73. 111.
Maior A. 136.
Maior N 13.
Maliţa M. 73.
Man O. 62.
Măncescu I 142. 153. 155. 156.
Manea D. 21.
Mangeron I. D. 20. 28. 33. 39. 60. 84. 151
Manison P. 91.
Manolache M. 23. 24.
Manughevici C. 13
Măran Ana 61. 111.
Mărculescu O. 13
Mărcuţiu S. 85. 88. 100. 138. 140. 153. 155.
Mardan D 13.
Mărginean I. 98. 138.
Margulius M. 72.
Marie 148
Marian V. 127.
Marinescu I 13. 153.
Markoff 29.
Marteş V. G. 21.
Maţai M 61.
Mateescu S. 13.
Matei Corvin 40
Matteoti 149
Măties V. I. 13. 22. 31. 34
Mazilu M. 37. 61. 85. 112
Maxwell 41.
Mehedinţi D. D. 72
Menelaos 69.

Mereuță E. 13.
Meteș M 61.
Michel 46.
Miclea N. 85. 111.
Mihalcea V. V 60.
Mihăileanu N. N. 7. 13. 38. 46. 51. 63. 70. 71. 72. 88. 127.
Mihaiu G 127.
Milcoveanu D. 13.
Milea G. E. 60
Miller G. A. 148
Milu I. N. 21.
Minkowski 29. 39.
Mioc V. 13. 58
Mircea G. 11.
Mitric A. 11. 49. 61. 62. 64. 154
Mittag-Leffler G. 28. 29. 30. 39 40. 41.
Mittag-Leffler S 28.
Moga V. 84.
Moisil G. 33
Moldovan M. 99. 142. 156.
Montel P. 32
Montucla 148
Morariu I. 24
Motoc D. M. 72
Munteanu I. 21. 142. 143 155.
Murariu P 13.
Murgulescu Elena 13.
Murgulescu G. I 13.
Musta S. 13 151.
Mutiu A 61. 97 111.
Myller Vera 41.

Nădășan Ș 1. 3 13. 15. 27. 39. 51. 67. 77. 89. 101. 117. 134. 145.
Nad Duris I. 50.
Naneș Cornelia 22.
Naneș G 13.
Năs.ase M. 21.
Nedelcu V. 11. 61 62. 87 88. 98. 116. 138. 141. 142 155
Nenciulescu H. 72.
Netto 29.
Neuberg J 58. 94.
Neguț 153.
Neumann Maria 7. 11. 24. 38. 62. 66. 84. 100. 101. 128. 138. 156.
Newton 69.
Nicolau A. 13.
Nicolau P 13.
Nicolescu M. 33.
Niculescu A. 60. 136
Niculescu V. G. 15.
Novac I 48. 49 50. 61. 62. 64. 75. 86. 87. 88 96. 98 99. 100. 116. 128. 138 140. 141. 142 143. 153. 154. 155. 156.
Nörlung E. N. 29. 30. 41

Ogrin N. 13
Oltenschi I. 13
Onicescu O. 13. 33.
Opalschi M. 99. 138
Opriș C. 100. 140. 141. 142.
Orășeanu C 13.
Osiosto 148.
Ovesea N. 37, 112. 138

Pălăceanu V. 61. 97 128. 151 152
Palade D. 49. 61. 62. 64
Pali S. 48. 49. 61, 62 86. 87. 88. 99. 100. 112. 138 141. 142. 153. 155. 156.
Panaite N T. 127.
Pantazi A. 33.
Papadopol Elena 21.
Pârvulescu M. S 127.
Păsișanu I. 153.
Pat M 24. 61. 111.
Patriciu V. 13.
Petrescu A. 13.
Petrescu P. A. 21.
Petrescu I. 46
Petrovici A. 11, 99. 114. 138. 141. 142
Pezzo 41.
Picard E. 29
Pisanca I. 85. 112. 153. 154. 155. 156
Plângu I. 85.
Poboran I. V 13.
Podraczky V. 48. 49. 61. 64. 98.
Poincaré H 29. 91.
Pompeiu D. 27. 33.
Pop E 13. 24. 114. 138. 142.
Pop V. 13.
Popa I. 84.
Popa N. 13. 21. 47. 60
Popa V. 48 49. 61. 62. 64. 86. 87. 88. 98 99. 100. 114. 115. 116. 138. 140. 141 142. 143. 153 154. 155. 156.
Popescu A. 23. 24 25. 47. 156
Popescu B. 23. 24. 50. 61. 85. 138. 141. 142 154.
Popescu N C. 13.
Popescu D. 48 49. 50 61. 62. 63. 85. 87. 88. 98. 99. 100. 138. 142. 153. 154 155.
Popescu E 13.
Popescu Eug. 13.
Popescu I. G 96.
Popescu I. 3. 13.
Popescu Maria 24
Popescu S. 84.
Popânceanu N. 84
Popovici E. D. 48. 61. 64. 87. 88 99. 138 140. 141 142. 153. 155.
Popp Sabina 34
Porumb N. 13.
Postelnicescu M. 21
Potlog S. A. 84
Potocki 90.
Preda D 23 24.
Predoescu I. M. 13
Predoescu M. T 21. 60.
Prisăcaru M. 49. 50. 87
Protopopescu I. 13
Purcariu I. 13
Puscașiu S 153. 152.
Ptolomeu 111.

Racliș N R. 13.
Radoslav G. I. 9
Rădulescu F. 84
Rădulet N. R 13.
Râmboiu S. 142. 153. 154. 155. 156
Râmniceanu I. C 127.
Revici T. 83
Reye 29.
Riemann B 30. 39. 90. 91.
Rogoz I. 85 138.
Rohrlich A. 61. 62 98. 99
Roibănescu C. 13.
Roman C 138.
Roman I. I. 127
Roman I 14.
Roose Ball 148.
Roșu A. 7. 32. 96
Roth R. E. 88
Rothenstein B. 24, 85

Sabac I. 33
Sabău M. 61 97 111
Saccheri 89 91.
Safirescu D 14.
Safta N. 11. 48 49. 61. 64
Sălceanu C 14.
Sâmbotin G. 21 60.
Sandu-Ville C 84.
Sârbu E. 24.
Sarton 148.
Săruleșteanu E. 24.
Sassui I 49. 61. 64. 87 88. 100. 113 115. 140. 141. 142. 155.
Sauciuc L. 14
Savi G. 14.
Savin I 127.
Savin C. I. 14
Scărlătescu D 14.
Schelle 29.
Schering 91.
Schileru I 14. 128.
Schiopu I. 49. 61. 64. 87. 99.
Schäffli 29
Schmidt F. 90.
Schott C 127.
Schram Edith 14.
Scoridor G. G. G 84. 144. 153. 155.
Segal Z 22.
Serdeleanu G. 85.
Șerangău I 49.
Șerangău M. 11. 49. 50 61 62 63 75 85 87 88 98 99 100. 116. 138. 140 142. 153 154. 155.
Șerban Gh 151.
Sergescu P. 7 14 20 28. 32. 33. 58. 92. 127. 136 148.
Sergiu P 26 155.
Severineanu C. 3 14.
Silaș G 14. 42.
Simionescu D. G. 7 14 20. 32. 85
Simon P 22.
Sin G. 98.
Șipoș E 24.
Schmith A. F. 148
Șmighelteki O 14.
Sonine 29.

Şrager A. 88
Staicu C. 24
Stamate I. I 14. 60. 136.
Stamatescu I. 14.
Stambuleanu A. 14
Stan A. 14. 83.
Stan I A. 7. 127.
Stan A. D. 7. 96
Stăncescu C 1, 14.
Stanciu P. 22. 24. 26 37. 61. 85.
Stanciu V 116. 144. 155.
Stande 29.
Stanciu M. 156
Stantzel E. 14
Steblea S. S 127.
Stefănescu M. 73
Stern T. 49. 61. 62. 68. 99 .100. 138. 141. 142. 155
Stjeltjes 29.
Stoenescu A. 60, 83
Stoian A. 48 61. 64. 86. 138. 140. 141. 142
Stoica D. V. 32
Stoicescu L 14.
Stoicescu M. 14.
† Stoicescu C T. 7.
Stoilov S. 33.
Stretea A 61.
Stroescu F. 11. 49 61 62. 64 85. 87 88 98 114. 138. 140 142.
Strub C 84.
Sturm 39.
Suba P. 14
Süli M 72.
Suter 148.
Székely G. 142. 153 156.
Szymanski P. 33.
arry 110.
Tarţa T. 14.
Tarţa Valeria 61. 85.
Tătaru A. 24.
Teuşan H. 49, 61, 62. 65. 138. 153. 154. 155.
Tchekiceff 29.
Teodorescu C. 1. 3 14.
Teodorescu N. 33.
Teodorescu P. 11. 49 50. 61. 62, 63. 64, 76. 85, 87. 100. 112. 113. 114. 116. 137 139. 141. 142. 144. 153. 154. 155 152.
Teodosiu A. 14.
Thébault V. 45, 50. 58. 60. 66. 69. 76. 92. 94. 100 116.
Tică M. 14. 21.
Tifescu B. 24.
Tigănoiu A. 25. 87. 99. 111 141.
Tilică G. 9.
deTilly 91.
Tincu C. C. 11. 22. 23 24. 37 49. 59. 61. 62. 63. 66 73 75 85 86. 87. 88 98 99 100. 111. 112. 115 116, 128. 138. 139 140. 141. 142. 144 153 154. 155.
Tino N. O 14 19 30 32. 46. 71. 83. 124. 144.
Tiţeica Gabriela 46.
Tiţeica G. 1. 30. 31. 71. 107. 148.
Tiţeica Ş. 127.
Titero I. 11 48. 61. 62. 98 99. 100
Turbuţiu Gh.
Tripşa I. 85. 87.
Tropfhe 148.
Tuca M. 153. 155.
Trufin E. 14.
Turcu V. 14.
Tutor A. 37. 61. 73. 85.
Tunaţiu Gh.
Turbuţiu Gh. 155

Văduva M. 22
Vâlceanu N. I 127.
Vâlcovici V. 2. 3. 14. 33. 46. 71. 110
Vasiliu-Leoben G. 60
Vasiliu M. 3.
Vasu V. 8
Vescan T 60.
Viciu A. 14.
Vicol A 23, 24.
Vişa E. 14 21. 22. 36. 60. 144.
Vlad I. V 14.
Vlădescu I. 14.
Vlăduţ C 11. 38. 50. 61. 62. 87.
Volterra 29.
Vonica C. I. 127
Voştinariu G. 22
Vrânceanu G. 33. 38. 85. 113 153.

Weber M 14.
Wegener E. 10 22. 23. 24. 25. 26. 50. 61. 73. 97. 111 128. 139.
Weierstrass K. 28. 29 39 40. 41
Wielcitner H 147.
Wluttaher 149.

Zăgănescu I 14.
Zaharia N. O. 14
Zamfirescu N 84.
Zapan G. 14 110.
Zavata V. 24.
Zbegan V. 14.
Zeutheu 29. 148
Zubac V. 48.

Nota redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Profesor *Vasile Mioc*, Inspector General secundar, Asistent la Politehnică şi Director la lic. Diaconovici Loga, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Agapi Valerin (P; 2410, 2418, 2419, 2420, 2424, 2435, 2454); *Almaşan Lazăr* (2424, 2429, 2435, 2454); *Blaga, Ovidiu* (2403, 2410, 2419, 2424, 2429, 2473); *Cărciu Ioan* (2456, 2472); *Constantinescu Ilie* (A; N; P.); *Constantinescu Virgil* (P; 2458, 2462, 2466, 2469, 2470); *Costăchescu V. C.* (P.); *Costin Ovidiu* (P; 2419, 2436); *Criveanu Frussy* (2416); *Dănescu Alexandru* (2411, 2416, 2419, 2424, 2427, 2435, 2437, 2444); *Dăscălescu V. Mihai* (2435, 2437); *Deutsch Emeric* (2429, 2452, 2454 2469); *Filimon Ioan* (P.); *Ghersch Paul* (2429, 2435, 2450, 2452, 2469, 2483); *Giurconiu Mihai* (P; 2412. 2428, 2458, 2460, 2463, 2467, 2471, 2472, 2474, 2478, 2479); *Gloden A.* (A; 2473, 2476); *Haret. Sp. Radu* (2338, 2347, 2357, 2364, 2406, 2432, 2443, 3461, 2467, 2474, 2476, 2477, 2478); *Hurezeanu Romulus* (1521, 2082, 2257, 2403. 2457, 2469); *Jancu Simion* 2406, 2474); *Man Iosif* 2452, 2453, 2454); *Manolescu Gh.* (2118, 2435, 2437, 2438, 2439, 2440, 2446, 2447, 2448, 2450, 2452, 2453, 2456, 2461, 2462, 2466, 2467, 2468, 2469, 2477, 2483, 2487); *Marinescu S. D.* (2418, 2450, 2456, 2460, 2462); *Mărcuţiu Silviu* (2400, 2466, 2469, 2474, 2475); *Moldovan Mircea* (P; 2456, 2469. 2477, 2480); *Munteanu Ghiuseppe* (2403, 2407, 2413, 2427, 2435, 2469); *Nedelcu Ulpiu* (2452, 2454, 2475); *Negaţ Ion* 1521, 1550, 1681, 1760, 1859, 20 2, 2098, 2234, 1241, 2257, 2272, 2298, 2403, 2411, 2412, 2456, 2467, 2469); *Novac Ioan* (P; 1922, 1935, 1938, 1949, 1951, 1962, 1971, 1975, 1979, 1982, 1991, 2017); *Pali Sergiu* (P.); *Pisanca Ionel* (P; 2473); *Popescu Alexandru* (2118, 2403, 2410, 2411, 2418, 2419, 2420, 2435, 2452, 2467, 2473); *Popescu Barbu* (P; 2418, 2427, 2452, 2473); *Puşcaşiu Silviu* (2408, 2443, 2448, 2453, 2466, 2469); *Riştea Gh.* (2437, 2454, 2473); *Stanciu Valeriu* (P); *Torcea Ioan* (2413, 2420); *Teodorescu Petre* (N; P; 2480, 2481, 2486, 2487); *Turbuţiu Gh.* (2403, 2410, 2424, 2429, 2456, 2468, 2473); *Vişa Eugen* (A; P.).

BIBLIOTECA ...RA...